

5 pratybos

Kompleksiniai skaičiai.

1. Atlikite veiksmus :

1) $\frac{(2-i)^4 + 1 + 6i}{(1-i)^3}$.

2) $\frac{(2-i)^3 + (4-i)^3}{(1+2i)^2}$.

3) Apskaičiuokite skaičiaus $-5 + 5i$, išreikšto trigonometrine forma, kvadratą.

4) Parašykite kompleksinį skaičių $z = \frac{(1-i)(2-i)}{1+2i}$ algebrine forma $x + iy$,

čia $x, y \in \mathbf{R}$. raskite z^{12} .

5) Raskite $z + z^{-1}$ realiąją ir menamąją dalis, jei $z = 3 + 2i$.

6) Parašykite $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{99}$ algebrine forma $x + iy$,
 $x, y \in \mathbf{R}$.

2. Ištraukite kvadratinę šaknį .

1) $\sqrt{16 + 30i}$.

2) $\sqrt{9 - 40i}$.

3. Išspręskite lygtis.

1) $(2-2i)x^2 - (6+6i)x - 5 + 5i = 0$.

2) $2ix^2 - (8+2i)x + (4-7i) = 0$.

3) $3z\bar{z} + z - 2\bar{z} = 5 - 3i$.

4) $z\bar{z} + 2\bar{z} - z = 6 - 6i$.

5) $z + 3\bar{z} = 3i$. Raskite z^{12} .

4. Raskite kompleksiniams skaičiams z atitinkančių geometrinę vietą .

1) $|z + 1 - i| \geq 1$.

2) $|z - 1 - 2i| < 2$.

3) $|z + 2 - i| = |z - 1 + 3i|$.

4) $|z - i| \geq |z - 1 + 2i|$.

5) $|z + i| > 1$, $\operatorname{Re} z < 2$, $\operatorname{Im} z \geq 3$.

6) $|z + 2i| = |2iz - 1|$.

7) $|z - i| = \sqrt{2} \cdot |\bar{z} - i|$.

6) $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 2$.

7) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{|z|^2 + |z| + 39}{1 + 2|z|} > -2$.

5. Apskaičiuokite.

- 1) $\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^9$.
- 2) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^9$.
- 3) $\frac{(1+i\sqrt{3})(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)}{\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi}$.
- 4) $\frac{(1+i)^{20}}{(1-i\sqrt{3})^{10}}$.
- 5) $\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{3}-i)^5}{(1+i)^{10}}}$.

Kompleksinės vieneto šaknys.

Tegu $U(n)$ - n -ojo laipsnio vieneto šakny aibė. n -ojo laipsnio vieneto šaknies ε_k eilė vadinamas mažiausias toks natūralus skaičius m , kad $(\varepsilon_k)^m = 1$. n -ojo laipsnio vieneto šaknis ε_k vadinama primityvia, jeigu jos eilė lygi n .

1. Tegu $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ - vieneto šaknis. Įrodykite, kad ε_k eilė yra lygi

$\overline{BDD(k, n)}$.

2. Įrodykite, kad šakny, kurių eilė lygi d yra $\varphi(d)$ (φ – EULERIO funkcija).
3. Įrodykite, kad primityviųjų šakny yra $\varphi(n)$.
4. Įrodykite, kad $U(m) \subset U(n)$, kai $m|n$.
5. Įrodykite, kad $U(m) \cap U(n) = \varepsilon_0$, kai $BDD(m, n) = 1$.
6. Faktorizuokite polinomas $x^n - 1$ ir $x^n + 1$ virš \mathbf{R} , kai $n = 3, \dots, 25$.
7. Įrodykite, kad $1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n-1} = 0$, kai $\beta \neq 1$ - vieneto šaknis.
8. Išreikšti funkcija $\cos 5x, \cos 8x, \sin 6x, \sin 7x$ funkcijomis $\cos x$ ir $\sin x$.
9. Išreikšti $\operatorname{tg} 6\varphi$ funkcija $\operatorname{tg} \varphi$.
10. Išreikšti funkcijas $\cos nx, \sin nx$ funkcijomis $\sin x, \cos x$.
11. Išreikšti funkcijas $\sin^3 x, \sin^4 x, \cos^5 x, \cos^6 x, \sin^3 x \cos^5 x$ funkcijomis $\sin nx, \cos mx$.