2 pratybos

*Lyginiai.*

1. Nustatykite, kurie iš lyginių teisingi $\forall n \in \mathbf{N}$ :

1) $n^3 \equiv n(\bmod 3)$.

2) $n^3 + 3n \equiv 2(\bmod 5)$.

3) $n^4 \equiv 1(\bmod 5)$.

4) $2m^3 - 3m^2 = 1\,(\bmod 10)$ .

2. Įrodykite:

1) $a - 5b \equiv 0(\bmod 19) \Longrightarrow 10a + 7b \equiv 0(\bmod 19)$.

2) $3^n \equiv -1(\bmod 10) \Longrightarrow 3^{n+4} \equiv -1(\bmod 10)$.

3) $(m+n)^p \equiv m^p + n^p(\bmod p)$ , su pirminiu $p$ ir su visais sveikaisiais $m$ ir $n$ .

3.Raskite skaičiaus $N = (1^2+1)\,(2^2+1)\,(3^2+1)\cdots(1000^2+1)$ dalybos iš 3 liekaną.

4. Pasinaudoję EULERio teorema apskaičiuokite.

1) $7^{9999}\,(\bmod 1000)$ .

2) $11^{9999}\,(\bmod 1000)$ .

3) $13^{9999}\,(\bmod 1000)$ .

5. Laipsnio $a^n\,(\bmod m)$ skaičiavimas, užrašant laipsnio rodiklį $n = \sum_i \alpha_i 2^i$ .

Apskaičiuokite

1) $7^{39}(\bmod 41)$.

2) $22^{144}\,(\bmod 73)$ .

3) $233^{451}\,(\bmod 23)$ .

4) $214^{243}\,(\bmod 21)$ .

6. Išspręskite lyginius.

1) $12x \equiv 5\,(\bmod 5)$ .

2) $11x \equiv 10\,(\bmod 16)$ .

3) $13x \equiv 65\,(\bmod 78)$ .

4) $8x \equiv 12\,(\bmod 20)$ .

5) $91x \equiv 21\,(\bmod 56)$ .

6) $18x \equiv 16\,(\bmod 22)$ .

7) $33x \equiv 9\,(\bmod 39)$ .

8) $52x \equiv 28\,(\bmod 60)$ .

9) $74x \equiv 32 \pmod{94}$.
10) $34 \equiv 24 \pmod{38}$.
11) $60x \equiv 33 \pmod{84}$.
12) $54x \equiv 26 \pmod{62}$.

7. Išspręskite lyginių sistemas.

1) $\begin{cases} 2x \equiv -1 \pmod{3} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$.

2) $\begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{9} \\ 5x \equiv 1 \pmod{8} \end{cases}$.

3) $\begin{cases} 11x \equiv 2 \pmod{5} \\ -x \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$.

4) $\begin{cases} 12x \equiv 15 \pmod{17} \\ 10x \equiv 4 \pmod{19} \\ 21x \equiv 16 \pmod{23} \end{cases}$.

5) $\begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod{23} \\ 15x \equiv 11 \pmod{43} \\ 25x \equiv 21 \pmod{63} \end{cases}$.

6) $\begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod{41} \\ 5x \equiv 1 \pmod{51} \\ 5x \equiv 1 \pmod{61} \end{cases}$.

7) $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{11} \\ 5x \equiv 2 \pmod{13} \\ 7x \equiv 3 \pmod{15} \end{cases}$.

8. *Dalumo požymiai.* Tegu
$n = (a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0)_{10} = a_k 10^k + \cdots + a_0$.

$$Q_s(n) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{is+s-1} ... a_{is+1} a_{is}),$$

tada $n = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{is+s-1} ... a_{is+1} a_{is}) \cdot 10^{is}$

$$Q'_s(n) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (a_{is+s-1} ... a_{is+1} a_{is}).$$

1) Įrodyti:
Su visais $n \in \mathbf{N}, s \in \mathbf{N}$ teisinga
$n \equiv Q_s(n) \pmod{10^s - 1}$,

$n \equiv Q'_s(n) \pmod{10^s + 1}$.

2) Raskite dalumo požymius iš
i) 9,99,999; 11,101,1001.
ii) 7,13,37.
iii) 17,19.

*Grupės.*

9. 1) Parašykite sudėties ir daugybos lenteles žieduose $\mathbf{Z}_7$, $\mathbf{Z}_8$, $\mathbf{Z}_9$, $\mathbf{Z}_{11}$, $\mathbf{Z}_{12}$ , $\mathbf{Z}_{13}$.
2) Išspręskite lygtis $x^2 = 1$ ir $x^2 = -1$ minėtuose žieduose.

10. Su kuriais $a \in Z_{100}$ teisinga: $a^{40} = \bar{1}$ .

11. Kurios iš primityviųjų klasių multiplikacinių grupių $U_n$ , $1 \le n \le 15$ , yra ciklinės. Atsakymą pagįskite.