1. Matematinė indukcija. Dalumo su liekana teorema.DBD. Tarpusavyje pirminiai skaičiai. Pirminiai skaičiai. Skaičių faktorizacija.

1. Nustatykite, kokias liekanas galima gauti dalijant:
1) Sveikojo skaičiaus kvadratą iš $7, 8, 10, 12, 13, 15, 20$?
2) $n^3 + 5$ pavidalo skaičių iš 9 ?
3) $n^3 - 5$ pavidalo skaičių iš 9 ?
4) $2n^2 + 1$ pavidalo skaičių iš 6 ?
5) $3n^3 - 2$ pavidalo skaičių iš 6 ?

2. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n :
1) $6 \mid 14n^3 + 9n^2 + n$.
2) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.
3) $17 \mid 8 \cdot 5^{2n+1} - 3 \cdot 2^{3n+1}$.
4) $13|3^3 - 3^6 + 3^9 - \cdots - 3^{6n}$.

FIBONACCI skaičių apibrėžimas: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.
3. Įrodyti, kad f_{5m} , $m \geq 1$, dalijasi is 5. ($f_5 = 5; f_{5(m+1)} = 5 \cdot f_{5m+1} + 3 \cdot f_{5m}$)
4. Dalydami a iš b gauname liekaną $r \neq 0$.
1) Kokią liekaną gausime dalydami $-a$ iš b ?
2) Ar skaičius mr yra ta liekana, kurią gausime dalydami ma iš mb, kai $m \neq 0$?

Euklido algoritmas ir tiesinė DBD išraiška.Matrica Euklido algoritmui:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7605 \\ 0 & 1 & 5733 \end{bmatrix} (-1)\uparrow \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1872 \\ 0 & 1 & 5733 \end{bmatrix} (-3)\downarrow \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1873 \\ -3 & 4 & 177 \end{bmatrix} (-16)\uparrow \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 49 & -65 & 0 \\ -3 & 4 & 117 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$(7605, 5733) = 117$ ir $117 = (-3) \cdot 7605 + 4 \cdot 5733$.

5. Apskaičiuokite:
1) $(1776, 1492) =$
2) $(1274, 1089) =$
3) $(7605, 5733) =$
4) $(3553, 527) =$
5) $(95, 432) =$
6) $(23581, 75217) =$

7) $(6787, 7194) =$

8) $\left(\underbrace{11...1}_{m}, \underbrace{11...1}_{n}\right) =$

FIBONACCI skaičių apibrėžimas matricomis:

$f_0 = 0$, $\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

6. Įrodyti, kad $\forall n \in \mathbf{N}_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$.

7. Įrodyti, kad $\forall n, m \in \mathbf{N}, m > 1$ $f_{m+n} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}$.

8. Įrodyti, kad $f_{mn} \mid f_m$.
9. Įrodyti, kad $\mathrm{DBD}(f_n, f_{n+1}) = 1$.
10. Įrodyti, kad $\mathrm{DBD}(f_m, f_n) = f_{\mathrm{DBD}(m,n)}$.

FERMAT faktorizacijos procesas:

Babilono laikų formulė $n = a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ *sako, kad faktorizuojamą skaičių reikia rašyti dviejų kvadratų skirtumu:* $n = r^2 - s^2$. *Todėl:*

(i) Apibrėžiame $r_0 = [\sqrt{n}]$;

(ii) Tikriname, ar $(r_0 + i)^2 - n$ *yra pilnas kurio nors skaičiaus kvadratas , kai* $i = 0, 1, 2, 3, ...$

Jei $n + s^2$ *nėra sveikojo skaičiaus kvadratas, kai* $s = 1, 2, ..., \frac{n-3}{2}$ *, tai* n *- pirminis .*

11. Faktorizuokite:
1) 2881;
2) 135337;
3) 2027651281;
4) 236273;
5) 438359;
6) 2091589.

12. Raskite natūralaus skaičiaus n daliklių skaičiaus $d(n)$ formulę. Remkitės skaičiaus n kanoniu skaidiniu.

13. Apskaičiuokite $d(n)$, kai $n = 5040; 84^{19}; 1000; 1350; 46200$.

14. Pateikite skaičiaus, turinčio a) lygiai 6 daliklius; b) lygiai 7 daliklius,- pavyzdžius.

15. Apskritimas suskaidytas į 720 lygių lankų. Kiek skirtingų (pagal kraštinių skaičių) taisyklingų daugiakampių, kurių viršūnės yra lankų galuose, galite nubrėžti?

16. Kiek lyginių daliklių turi natūralusis skaičius n ? Kuriems n tai - $\frac{1}{2}d(n)$?

17. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n intervale $[n+1; n!+1]$ egzistuoja pirminis skaičius.

18. Tegu $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3, \ldots$ yra visų pirminių skaičių didėjanti seka. Tada

(1) $p_{n+1} \leq 2p_n + 1$ (remkitės *Bertrand'o postulatu*: su visais natūraliaisiais $n > 1$ egzistuoja toks pirminis p, kad $n \leq p \leq 2n$.).

(2) $p_n \leq p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, $n \geq 1$.

19. Įrodykite, kad jeigu $(n, m) = 1$, tai $(2^m - 1, 2^n - 1) = 1$.

20. Raskite skaičiaus $n!$ kanoninį skaidinį.

21. Įrodykite, kad šešiaženklis skaičius $abcabc$ yra dalus iš $7, 11, 13$.

22. Įrodykite ,kad aštuoniaženklis skaičius $abcdabcd$ yra dalus iš $73, 137$.