1. Metrinių erdvių geometrija.

1. Raskite atstumą nuo vektoriaus x iki poerdvio, apibrėžto lygtimis.

(i) $x = (2,4,0,-1)$; $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$.

(ii) $x = (3,3,-4,2)$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$.

(iii) $x = (3.3.-1,1,-1)$; $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$.

(iv) $x = (3,3,-1,1,-1)$; $x_1 - 3x_2 + 3x_4 - x_5 = 0$.

2. Įrodykite, kad atstumo nuo vektoriaus x iki Euklido erdvės poerdvio su baze $e_1, ..., e_n$ kvadratas yra lygus

$$\frac{\mathrm{G}\left(e_1, ..., e_k, x\right)}{\mathrm{G}\left(e_1, ..., e_k\right)} .$$

3. Įrodykite, kad sistemos Gramo matrica G yra neišsigimusi tada ir tik tada, kada sistema yra bazė.

4. Įrodykite, kad det G Gramo-Šmidto ortogonalizacijos proceso metu nekinta.

5. Įrodykite, kad det $\mathrm{G}(x_1, ..., x_k) \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_k\|^2$. Lygybė galima tik tada, kai $(x_i, x_j) = 0, i \neq j$; arba, kai $x_i = 0$ su kuriuo nors i.

6. Įrodyti, kad n -mačio stačiojo gretasienio įstrižainės kvadratas lygus briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės kvadratų sumai.

7. Raskite n - mačio kubo įstrižainių, ortogonalių duotai įstrižainei, skaičių.

8. Raskite n - mačio kubo, kurio kraštinė a, įstrižainės ilgį.

9. Raskite kampus tarp n -mačio kubo įstrižainių ir briaunų.

10. Raskite apibrėžto apie $n-$ matį kubą, kurio briauna a, rutulio spindulį R ir priklausomai nuo n išspręskite nelygybę R$< a$.

11. Apskaičiuokite gretasienio tūrį, kai kraštinės lygios:

(i) $\begin{matrix} (1,-1,1,-1) \\ (1,1,1,1) \\ (1,0,-1,0) \\ (0,1,0,-1) \end{matrix}$ (ii) $\begin{matrix} (1,1,1,1) \\ (1,-1,-1,1) \\ (2,1,1,3) \\ (0,1,-1,0) \end{matrix}$

(iii) $\begin{matrix} (1,1,1,2,1) \\ (1,0,0,1,-2) \\ (2,1,-1,0,2) \\ (0,7,3,-4,-2) \\ (39,-37,51,-29,5) \end{matrix}$ (iv) $\begin{matrix} (1,0,0,2,5) \\ (0,1,0,3,4) \\ (0,0,1,4,7) \\ (2,-3,4,11,12) \\ (0,0,0,0,1) \end{matrix}$.

12. Įrodykite, kad gretasienio tūriams galioja

$$V(a_1,...,a_k,b_1,...,b_l) \leq V(a_1,...,a_k) \cdot V(b_1,...,b_l).$$

Lygybė galioja tik tada, kai $(a_i, b_j) = 0$ su visais i, j.

13. Apskaičiuokite kampą tarp vektoriaus x ir poerdvio L .

(i) $x = (2,2,1,1)$; $L = \langle (3,4,-4,-1), (0,1,-1,2) \rangle$.

(ii) $x = (1,0,3,0)$; $L = \langle (5,3,4,-3), (1,1,4,5), (2,-1,1,2) \rangle$.

(iii) $x = (-3,15,1,-5)$; $L = \langle (2,3,-4,-6), (1,8,-2,-16), (1,-5,-2,10) \rangle$.

(iv) $x = \left(3,1,\sqrt{2},-2\right)$; $L = \langle (2,-1,2,1), (-1,2,-2,1), (-1,1,-1,0) \rangle$.

14. Įrodykite, kad jeigu bet kurie du iš k skirtingi vektoriai sudaro kampą $\frac{\pi}{3}$, tai $k \leq \dim V$.

Apibrėžimas. Kampas tarp vektoriaus v ir poerdvio L yra kampas tarp v ir jo ortogoalios projekcijos į L.

15. Raskite kampą tarp poerdvių:

$\langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$ ir $\langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle$.

Erdvėje M_n apibrėžta skaliarinė sandauga: $(f,g) = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

16. Tegu ervėje M_n duoti polinomai $f_1(t) = 3t^2+2t+1$, $f_2(t) = -t^2+2t+1$, $f_3(t) = 3t^2+2t+5$, $f_4(t) = 3t^2+5t = 2$. Rakite polinomą $f_0(t)$, $\deg f_0 \leq 2$, kuris būų vienodai nutolę nuo f_1, f_2, f_3, f_4. Apskaičiuokite šį atstumą. Įrodykite, kad polinomas $f_0(t) + c_3t^3 + \cdots + c_nt^n$ irgi vienodai nutolęs nuo f_1, f_2, f_3, f_4. Raskite šį atstumą.

17. Apskaičiuokite atstumą tarp t^n ir M_{n-1}.

18. Apskaičiuokite atstumą tarp $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0$ ir M_{n-1}.

19. Apskaičiuokite atstumą tarp $at^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0$ ir M_{n-1}.

20. Tegu $L = \{f \in M_n, f(1) = 0\}$. Įrodykite, kad atstumas tarp bet kurio $g \in M_n$ ir L yra $\dfrac{g(1)}{\sqrt{n+1}}$.

21. Tegu $v \in E$ fiksuotas vektorius, o $L = \langle v \rangle^{\perp}$. Įrodykite, kad atstumas tarp vektoriaus x ir L yra lygus $\dfrac{|(x,v)|}{\|v\|}$.

22. Įrodykite, kad kampų, kuriuos sudaro vektorius v su poerdviu L ir su $L^{\perp}$, suma lygi $\frac{\pi}{2}$.