1. Euklido ir unitariosios erdvės.

1. Jeigu $(u,v)_1$ ir $(u,v)_2$ yra Euklido erdvės skirtingos skaliarinės daugybos, tai skaliarine daugyba bus ir $a\,(u,v)_1 + b\,(u,v)_2$, kai $a, b-$ neneigiamieji, kartu nelygūs nuliui skaičiai. Įrodykite.

2. Ortogonalizuokite aritmetinės erdvės R^n vektorių sistemą:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,2,1)\,, \\ u_2 &= (-3,-4,-1)\,, \\ u_3 &= (-4,-7,0)\,. \end{aligned}$$

3. Ortogonalizavimo procesu sudarykite aritmetinės erdvės R^n vektorių $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinio apvalkalo ortogonaliąją bazę:

$$\begin{aligned} u_1 &= (2,3,-4)\,, \\ u_2 &= (-3,-1,5)\,, \\ u_3 &= (8,-13,16)\,. \end{aligned}$$

4. Papildykite vektorių sistemą $u_1, u_2, ..., u_m$ iki aritmetinės erdvės R^n ortonormuotosios bazės:

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{1}{3}\,(1,-2,2)\,, \\ u_2 &= \tfrac{1}{3}\,(-2,1,2)\,. \end{aligned}$$

5. Raskite aritmetinės erdvės R^4 vektorių $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinio apvalkalo ortogonaliojo papildinio bazę;

$$\begin{aligned} u_1 &= (4,1,2,-3)\,, \\ u_2 &= (2,-2,3,5)\,. \end{aligned}$$

6. Apskaičiuokite aritmetinės erdvės R^4 vektoriaus u projekciją ir statmenį į vektorių sistemos $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinį apvalkalą $\langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle$:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,-1,2,3)\,, \\ u_2 &= (-1,3,1,5)\,, \\ u &= (2,-3,3,-3)\,. \end{aligned}$$

7. Ar bus Euklido erdvės E poerdviu aibė

$\{U = u \in E : (v, u) = a$,čia $v -$ fiksuotas vektorius,o $a -$ fiksuotas skaičius$\}$?

8. Polinomų vektorinėje erdvėje M_n kuriuo nors būdu apibrėžta skaliarinė sandauga. Įrodykite, kad Euklido erdvėje $M_n$egzistuoja ortogonali bazė, kurioje su kiekvienu sveiku skaičiumi $k : 1 \leq k \leq n$ yra po vieną k - ojo laipsnio polinomą.

9. Tegu $f_0(x), f_1(x), ..., f_n(x)$ ir $g_0(x), g_1(x), ..., g_n(x)$ dvi bazės iš 17.

Įrodykite, kad, daugiausiai pakeitus numeraciją, turėsime $f_i = a_i g_i$, $a_i \in R$.

10. Tegu $e_1, e_2, ..., e_n$ realiosios vektorinės erdvės V bazė. Įrodyti, kad erdvėje V galima apibrėžti skaliarinę sandaugą taip, kad sistema $e_1, e_2, ..., e_n$ taptų ortonormuota baze Euklido ervėje V.

11. Vektorinėje ervėje M_n apibrėžti skaliarinę sandaugą taip, kad polinomų sistema $1, t, \frac{t^2}{2!}, ..., \frac{t^n}{n!}$ būtų ortogonalia.

Apibrėžimas. *Tegu L - Euklido erdvės E poerdvis. Su kiekvienu $x \in E$ egzistuoja $y \in L$ ir toks $z \perp L$, kad $x=y+z$. Čia y vadinamas ortogonaliąja projekcija, o z - statmeniu į L.*

12.-13. Raskite vektoriaus x ortogonaliąją projekciją ir statmenį į L.

12.a) $x = (14, -3, -6, -7)$; $L = \langle(-3, 0, 7, 6); (1, 4, 3, 2); (2, 2, -2, -2)\rangle$.

b) $x = (2, -5, 3, 4)$; $L = \langle(1, 3, 3, 5), (1, 3, -5, -3), (1, -5, -3, -3)\rangle$.

13. a) $$x = (-3, 0, -5, 9), L = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) : \begin{array}{r} 3a_1 + 2a_2 + a_3 - 2a_4 = 0 \\ 5a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 10a_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

b) $$x = (7, -4, -1, 2), L = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) : \begin{array}{r} 2a_1 + a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 4a_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

14. Euklido erdvėje įrodyti : $x \perp y \Longleftrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

15. Unitarioje erdvėje įrodyti : $x \perp y \Longrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Ar galioja atvirkštinis teiginys?

16. Unitarioje erdvėje įrodyti : $x \perp y \Longleftrightarrow \|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ su visais $\alpha, \beta \in C$.

17. Unitarioje erdvėje įrodyti : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

18. Įrodyti, kad bet kokiame Euklido erdvės E poerdvyje U galima parinkti ortonormuotas bazes $e_1, ..., e_k$ ir $f_1, ..., f_k$ taip, kad galiotų : $(e_i, f_j) = 0, i \neq j$ ir $(e_i, f_i) = 1$.

Apibrėžimas. *Kai $E = U$, tai bazės iš 27. vadinamos binormuotomis.*

19. Įrodyti, kad bet kokiai ortonormuotai Euklido erdvės bazei egzistuoja *vienintėlė* binormuota bazė .

20. Tegu $e_1, ...e_n$ ir $f_1, ..., f_n$ biortonormuotos bazės. Įrodyti, kad $\langle e_1, ..., e_k \rangle^{\perp} = \langle f_{k+1}, ..., f_n \rangle$ su visais k.

21. Raskite biortonormuotas bazes bazei e_1, e_2, e_3, e_4.

a) $e_1 = (1, 0, 0, 0)\,, e_2 = (0, 2, 0, 0)\,, e_3 = (0, 0, 3, 0)\,, e_4 = (0.0.0.4)\,.$

b) $e_1 = (1, 0, 1, 0)\,, e_2 = (0, 1, 2, 0)\,, e_3 = (0, 0, 1, 0)\,, e_4 = (0, 0, 3, 1)\,.$

c) $e_1 = (1, 1, 1, 1)\,, e_2 = (0, 1, 1, 1)\,, e_3 = (0, 0, 1, 1)\,, e_4 = (0, 0, 0, 1)\,.$

d) $e_1 = (1, 1, 1, 1)\,, e_2 = (1, 1, -1, -1)\,, e_3 = (1, -1, 1, -1)\,, e_4 = (1, -1, -1, 1)\,.$

22. Raskite lygtis, kurios apibrėžia poerdvio L ortogonalųjį papildinį.

a) $L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$

b) $L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0 \end{array} \right\}.$

23. Tegu $e_1, ..., e_k$ - orotnormuota sistema n-matėje Euklido erdvėje E. Įrodykite, kad $\sum_{i=1}^{k} (u, e_i) \leq \|u\|^2\,, \forall u \in E.$

Lygybė galima tada ir tik tada, kada $k = n$.