1. Tiesiniai atvaizdžiai ir operatoriai. Operatoriaus matricos Žordano forma.

1.Raskite tiesinį operatorių $\mathcal{A}$, kuriuo aritmetinės erdvės R^3 bazės vektoriai u_1, u_2, u_3 keičiami vektorių sistema v_1, v_2, v_3 :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,2,1)\,, & v_1 &= (-3,3,6)\,, \\ u_2 &= (2,1,-1)\,, & v_2 &= (-8,4,4)\,, \\ u_3 &= (-1,1,2)\,, & v_3 &= (5,7,2)\,. \end{aligned}$$

2. Aritmetinės erdvės R^3 tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica bazėje u_1, u_2, u_3 yra A . Raskite to operatoriaus matricą A bazėje v_1, v_2, v_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} v_1 &= 2u_1 + 3u_2 - 3u_3, \\ v_2 &= -u_1 + 4u_2 - 2u_3, \\ v_3 &= -3u_1 + 6u_2 - 5u_3. \end{aligned}$$

3. Įrodykite, kad matricų $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(\forall a, b, c, d \in Q)$ daugyba iš kairės iš matricos A yra vektorinės erdvės $\mathrm{Q}_{2\times 2}$ virš kūno Q tiesinis operatorius ir raskite to operatoriaus matricą bazėje u_1, u_2, u_3, u_4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ u_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Aritmetinės erdvės R^3 tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica bazėje u_1, u_2, u_3 yra A , o operatoriaus $\mathcal{B}$ matrica bazėje v_1, v_2, v_3 yra B. Raskite operatoriaus $\mathcal{BA}$ matricą bazėje v_1, v_2, v_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} u_1 &= (3,-1,2)\,, \\ u_2 &= (1,2,2)\,, \\ u_3 &= (-2,3,4)\,, \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} v_1 &= (11,-6,-6)\,, \\ v_2 &= (17,-8,-6)\,, \\ v_3 &= (9,-3,-2)\,. \end{aligned}$$

5. Aritmetinės erdvės R^3 tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica bazėje u_1, u_2, u_3 yra A , o operatoriaus $\mathcal{B}$ matrica bazėje v_1, v_2, v_3 yra B. Raskite operatoriaus $\mathcal{B}+\mathcal{A}$ matricą bazėje u_1, u_2, u_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 20 & -50 \\ -5 & -5 & 5 \\ 40 & 20 & -50 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} u_1 = (4,-3,3)\,, \\ u_2 = (1,1,6)\,, \\ u_3 = (4,-2,5)\,, \end{array}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} v_1 = (2,1,3)\,, \\ v_2 = (1,-1,2)\,, \\ v_3 = (0,1,2)\,. \end{array}$$

6. Raskite aritmetinės erdvės R^n tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ vaizdo ir branduolio bazes, kai
$\mathcal{A}(u) = (2a_1 - a_2 - a_3, a_1 + a_2 + a_3, 4a_1 + a_2 + a_3)$, čia $u = (a_1, a_2, a_3)$.

7. Raskite aritmetinės erdvės R^n tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius, kai to operatoriaus matrica yra $A = \begin{pmatrix} -22 & -10 & 19 \\ 10 & 6 & -8 \\ -26 & -10 & 23 \end{pmatrix}$.

8. Raskite aritmetinės erdvės R^n tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$, kurio matrica A , tikrinių vektorių tiesinius apvalkalus:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Ar aritmetinės erdvės R^n tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$, kurio matrica A , yra paprastosios struktūros operatorius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Sudarykite aritmetinės erdvės R^n bazę, kurioje tos erdvės tiesinis operatorius, apibrėžtas matrica A , turi diagonalinę matricą:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ -6 & -5 & -6 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Raskite aritmetinės erdvės R^n tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$, kurio matrica A , dvimatį invariantinį poerdvį:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Užrašykite šias matricas Žordano forma:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 20 \\ 2 & -5 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. Užrašykite šias matricas Žordano forma ir parašykite Žordano bazes:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -38 & -51 \\ 2 & 17 & 22 \\ -1 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

14. Kurios iš matricų A, B ir C yra panašios:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -9 & -36 \\ -7 & 10 & 28 \\ 4 & -4 & -13 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 5 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Įrodykite, kad tiesinis atvaizdis tiesiškai priklausomą sistemą atvaizduoja į tiesiškai priklausomą sistemą.

16. Ar tiesinis atvaizdis tiesiškai nepriklausomą sistemą atvaizduoja į tiesiškai nepriklausomą sistemą? Ji ne, tai kurie tiesiniai atvaizdžiai tai daro?

17. Tegu $V = V_1 + V_2$, o $U = V_1 \cap V_2$. $\mathcal{A}$ - tiesinis atvaizdis. Ar teisinga : $\mathcal{A}V = \mathcal{A}V_1 + \mathcal{A}V_2$ ir $\mathcal{A}U = \mathcal{A}V_1 \cap \mathcal{A}V_2$. Pateikite pavyzdį.

18. Pateikite pavyzdį: $\mathcal{A} : V \to V$, kad $V \neq Im\mathcal{A} \oplus Ker\mathcal{A}$.

19.. Pateikite pavyzdį: $\mathcal{A}, \mathcal{B} : M_n \to M_n$, kad $Im\mathcal{A} = Im\mathcal{B}$, $Ker\mathcal{A} = Ker\mathcal{B}$, bet $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

20. Tegu $\mathcal{D} : M_n \to M_n, \mathcal{D}(f) = f'$ – diferencijavimo operatorius. Raskite $Im\mathcal{D}$ ir $Ker\mathcal{D}$.

21. Tegu $\mathcal{H} : M_n \to M_n, \mathcal{H}_h(f(t)) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$, čia h - fiksuotas. Raskite $Im\mathcal{H}$ ir $Ker\mathcal{H}$.

22. Įrodykite, kad diferencijavimo operatorius $\mathcal{D}$ yra *nilpotentinis*, t.y. $\exists q \in \mathbf{N} : \mathcal{D}^q = 0$. Raskite *nilindeksą* q .

23. Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$:

a) tikrines reikšmes;

b) tikrinius vektorius;

c) minimalųjį polinomą;

d) charakteristinį polinomą;

e) Žordano bazę ir matricos Žordano formą.

24. Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{H}$:

a) tikrines reikšmes;

b) tikrinius vektorius;

c) minimalųjį polinomą;

d) charakteristinį polinomą;

e) Žordano bazę ir matricos Žordano formą.