1. Vektorių sistemos.

1. Aritmetinėje erdvėje R_4 raskite dvi skirtingas bazes, turinčias vektorius

$$v_1 = (1,1,0,0) \text{ ir } v_2 = (0,0,1,1).$$

2. Polinomų sistemą $t^5+t^4, t^5-3t^3, t^5+2t^2, t^5-t$ papildykite iki bazės ervėje M_5.

3. Poerdviui $L = \langle (1,3,0,-1), (2,5,1,2), (1,2,2,3) \rangle$ raskite du skirtingus papildinius L^c.

4.Erdvėje M_n raskite poerdvio $\{f(x) \mid f(1) = 0\}$ papildinį.

Uždaviniuose 5-6. nagrinėjama realiųjų funkcijų su vienu kintamuoju vektorinė erdvė $F(R)$.

5. Įrodykite, kad funkcijos $f_1, f_2, ..., f_n \in F(R)$ yra tiesiškai nepriklausoma sistema tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie skaičiai $a_1, a_2, ..., a_n$, kad $\det(f_i(a_j)) \neq 0$.

6. Vektorinėje erdvėje $F(R)$ įrodykite funkcijų sistemos tiesinę nepriklausomybę.

1) $\sin x, \cos x$;
2) $1, \sin x, \cos x$;
3) $\sin x, \sin 2x, ..., \sin nx$;
4) $1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx$;
5) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx$, čia $n \geq 2$;
6) $1, \sin x, \sin^2 x, ..., \sin^n x$, čia $n \geq 2$;
7) $1, \cos x, \cos^2 x, ..., \cos^n x$, čia $n \geq 2$;
8) $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, ..., e^{a_n x}$, čia $a_i \neq a_j$, kai $i \neq j$ ir $n \geq 2$;
9) $x^{a_1}, x^{a_2}, ..., x^{a_n}$, čia $a_i \neq a_j$, kai $i \neq j$ ir $n \geq 2$;

7. Papildykite sistemą iki bazės.

1) $(0,0,1,1,1), (1,2,1,2,0)$ aritmetinėje erdvėje virš $GF(3)$;
2) $(3,1,-1,1), (-1,2,3,-4), (7,7,3,-5)$ aritmetinėje erdvėje virš R.;
3) $(2,1,1), (3,-2,2)$ aritmetinėje erdvėje virš R.;
4) $(3,1,0,2), (2,1,1,3)$ aritmetinėje erdvėje virš $GF(5)$.

8. Įrodykite, kad aritmetinės erdvės R^4 vektorių sistema $u_1, u_2, ..., u_n$ yra tiesiškai nepriklausoma ir apskaičiuokite šių vektorių tiesinę kombinaciją u;

$u_1 = (2, 1, 0, 1)\,; u_2 = (1, -2, 1, 3)\,; u_3 = (3, 4, -1, 2)$

$u = 2u_1 - 3u_2 + 4u_3$.

9. Patikrinkite, ar aritmertinės erdvės R^n vektorių sistema $u_1, u_2, ..., u_n$ yra tiesiškai priklausoma :

$u_1 = (3, 4, -2)\,; u_2 = (u_1, u_2, u_3)\,; u_3 = (u_1, u_2, u_3)\,.$

10. Apskaičiuokite aritmertinės erdvės R^3 vektorių sistemos $u_1, u_2, ..., u_n$ rangą, pasinaudoję tik apibrėžimu:

$u_1 = (1, 1, 1)\,; u_2 = (1, 2, 3)\,; u_3 = (-1, 1, -2)\,.$

11. Apskaičiuokite polinomų, kurių laipsniai ne didesni už 5, erdvės $\mathrm{R}_5[x]$ vektorių sistemos rangą, pasinaudoję tik jo apibrėžimu:

$2; 2 + x; 3 + 2x + x^2$.

12. Apskaičiuokite matricos A rangą elementariųjų pertvarkių būdu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. Kuri iš nurodytųjų vektorių sistemų sudaro aritmetinė erdvės R^4 bazę:

$u_1 = (1, -1, 2, 1)\,; u_2 = (2, 3, 1, 4)\,; u_3 = (5, -1, -1, 2)\,, u_4 = (3, 2, 2, 1)\,.$

14. Kuri iš nurodytųjų vektorių sistemų sudaro antros eilės matricų su realiaisiais koeficientais erdvės $\mathrm{R}_{2\times 2}$ bazę:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Įrodykite, kad aritmertinės erdvės R^4 vektorių sistema $u_1, u_2, ..., u_n$ sudaro bazę ir raskite vektoriaus u koordinates toje bazėje:

$u_1 = (3, 5, 1, 2)\,; u_2 = (-1, 2, 2, 3)\,; u_3 = (2, 1, 3, 4)\,; u_4 = (-2, -3, 1, -5)\,, u = (-2, 3, 1, -4)\,.$

16. Ne aukštesnio kaip 5-ojo laipsnio polinomų erdvėje $\mathrm{R}_5[t]$ raskite polinomo $f(t) = t^5 - 2t^4 + t^3 + 2t^2 - t + 1$ koordinates bazėse

1) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$;

2) $1 + t, t + t^2, t^2, t^2 + t^3, t^4 + t^2, t^5 + t^2$.

17. Raskite aritmertinės erdvės R^4 vektorių sistemos $u_1, u_2, ..., u_n$ rangą:

$u_1 = (2, 1, 1, -1)\,; u_2 = (2, 2, 3, 4)\,; u_3 = (-1, -2, -1, -3)\,; u_4 = (-1, -1, 1, 2)\,.$

18. Raskite antros eilės matricų su realiaisiais koeficientais erdvės $\mathrm{R}_{2\times 2}$ vektorių sistemos rangą:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

12. Raskite vektorių $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinio apvalkalo $\langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle$ bazę ir dimensiją, kai

$u_1 = (1, 4, -7, 3); u_2 = (-3, 10, -9, -7); u_3 = (2, -3, 1, 5); u_4 = (0, 11, -15, 1).$

19. Ar $\sqrt[4]{3} \in \left[1, \sqrt{3}\right]_Q$?

20. Vektorinėje erdvėje R_4 raskite dvi bazes, turinčias vektorius $(1, 1, 0, 0)$ ir $(0, 0, 1, 1)$.

21. Sistemą $t^5 + t^4, t^5 - 3t^3, t^5 + 2t^2, t^5 - t$ papildyti iki bazės erdvėje $\mathrm{R}_5[t]$.

22. Ar begalinės sekos $x = (a_1, a_2, \ldots)$ sudaro vektorinę erdvę S ? Jeigu taip, kokia šios erdvės dimensija?

23. F$\subset$S , $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, k = 3, 4, ...$. Raskite $\dim F$ .Raskite F bazę .

24. V$\subset$ $R_n : (a_1, ..., a_n) \in V \Longleftrightarrow a_1 + \cdots + a_n = 0$. Raskite $\dim V$ ir V bazę.