1. Matricos charakteristinis polinomas ir tikrinės reikšmės.

1. Raskite, jeigu įmanoma, e^A ir $\ln A$, kai A - polinomo $f(x)$ lydinčioji matrica.

1) $f(x) = x^2 - 2x - \dfrac{5}{4}$. 2) $f(x) = x^2 + \dfrac{11}{12}x + \dfrac{1}{6}$.

3) $f(x) = x^2 - \dfrac{21}{10}x + \dfrac{9}{10}$.

Sprendimas. (i) Raskite polinomo$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ lydinčiąją matricą A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(ii) Raskite charakteringojo polinomo šaknis: $\det(A - tE) = \chi_A(t) = 0$.Tai matricos A tikrinės reikšmės.

(iii) Jeigu matricos A tikrinės reikšmės poromis skirtingos : $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, tai egzistuoja tokia neišsigimusi matrica C, kad

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, CA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} C,$$

$$A = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} C.$$

(iv) Turime $A^m = C^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix} C$ ir

$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}$, $\ln A = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} (A - E)^p$.