# 1. Determinantai.

1. Suskaičiuokite determinantus.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 7 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

2) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}.$

3) $A_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & a & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}, B_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix},$

$C_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}, D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix},$

$E_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}, F_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}.$

$FF_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}, G_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$

$$H_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ddots & & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Įrodykite, kad jeigu $A^T = -A$ , tai $\det A = (-1)^n \det A$ .

3. Išspręskite lygtis.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ t+1 & 2 & t+3 & 4 \\ 1 & 3+t & 4+t & 5+t \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$

3) $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 4 & 3 \\ 3 & 4 & x & 2 \\ 4 & 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 0.$

4.1. Palyginkite kvadratinių matricų $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ir $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ determinantus, jei $b_{ij} = 2^{i-j} a_{ij}$ .

4.2. Palyginkite kvadratinių matricų $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ir $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ determinantus, jei $b_{ij} = a_{n+1-i,j}$ .

4.3. Palyginkite kvadratinių matricų $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ir $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ determinantus, jei $b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

5. Tiesiogiai neskaičiuodami determinantų įrodykite, kad

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ dalijasi iš 17.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ dalijasi iš 31.

6. Įrodykite, kad $n$ -osios eilės determinantas

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$ apibrėžia Fibonaccio skaičius.