

## 1. Kompleksinės vieneto šaknys.

Tegu  $U(n)$  -  $n$ -ojo laipsnio vieneto šaknų grupė. Ši grupė yra ciklinė, generuojama kuria nors primityviąja šaknimi.

1. Įrodykite, kad bet kuris  $U(n)$  pogrupis yra ciklinis.
2. Tegu  $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$  - vieneto šaknis. Įrodykite, kad  $\varepsilon_k$  eilė yra lygi  $\overline{BDD(k, n)}$ .
3. Įrodykite, kad bet kuriam  $n$  dalikliui  $d$  egzistuoja pogrupis, kurio eilė yra  $d$ .
4. Įrodykite, kad šaknų, kurių eilė lygi  $d$  yra  $\varphi(d)$  ( $\varphi$  – EULERIO funkcija).
5. Įrodykite, kad primityviųjų šaknų yra  $\varphi(n)$ .
6. Įrodykite, kad  $U(m) \subset U(n)$ , kai  $m|n$ .
7. Įrodykite, kad  $U(m) \cap U(n) = \varepsilon_0$ , kai  $BDD(m, n) = 1$ .
8. Faktorizuokite polinomus  $x^n - 1$  ir  $x^n + 1$  virš  $\mathbf{R}$ , kai  $n = 3, \dots, 25$ .
9. Įrodykite, kad  $1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n-1} = 0$ , kai  $\beta \neq 1$  - vieneto šaknis.
10. Išreikšti funkcija  $\cos 5x, \cos 8x, \sin 6x, \sin 7x$  funkcijomis  $\cos x$  ir  $\sin x$ .
11. Išreikšti  $\operatorname{tg} 6\varphi$  funkcija  $\operatorname{tg} \varphi$ .
12. Išreikšti funkcijas  $\cos nx, \sin nx$  funkcijomis  $\sin x, \cos x$ .
13. Išreikšti funkcijas  $\sin^3 x, \sin^4 x, \cos^5 x, \cos^6 x, \sin^3 x \cos^5 x$  funkcijomis  $\sin nx, \cos mx$ .