Algebros egzaminas. Informatika. 2001 06 15. Rimantas Grigutis
Atsakymai ir sprendimai

1.*Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n, tarpusavyje pirminiais skaičiui 10, teisinga:* $(n+20)^{n+20} \equiv n^n \pmod{10}$. *Pasinaudokite Oilerio teorema.*

Sprendimas. $(n+20)^{n+20} \equiv n^{n+20} = n^n \cdot n^{20} \pmod{10}$. Pagal Oilerio teoremą $n^{\varphi(10)} = n^4 \equiv 1 \pmod{10}$, todėl ir $n^{20} \equiv 1 \pmod{10}$.

2. *Suformuluokite Oilerio teoremą ir iliustruokite ją ne mažiau kaip 4 pavyzdžiais.*

Sprendimas. Oilerio teorema: Su visais $a \in N$, ir $(a,m) = 1$ teisinga $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

3. *Kurie iš polinomų yra neredukuojami virš Q : $a) x^2+3; b) x^2-169; c) x^3+x^2+x+1; d) x^3+2x^2+3x+4$. Atsakymus pagrįskite. Teiginiais, kuriais remiatės, įrodykite.*

Sprendimas. $a)$ ir $d)-$ taip; $b)$ ir $c)-$ ne.

4. *Parašykite kubines šaknis iš $-i$ (minus i) trigonometrine ir poline forma.*

Sprendimas. $\sqrt[3]{-i} = \left\{\left[1, \frac{\pi}{2}\right], \left[1, \frac{7\pi}{6}\right], \left[1, \frac{11\pi}{6}\right]\right\} = \left\{i; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$.

5. *Išspręskite lygtį $((1-i)z)^3 + i = 0$ ir atsakymą parašykite algebrine forma.*

Sprendimas. $z = \dfrac{\sqrt[3]{-i}}{1-i} = \dfrac{\sqrt[3]{-1}}{\left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right]} = \left\{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{17\pi}{12}\right], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{12}\right]\right\}$

$= \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{1-i} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)i; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{1-i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)i\right\}$

6. *Parašykite teigiamai apibrėžtą kvadratinę formą $f(x_1, x_2, x_3)$, kurioje a) būtų visų kintamųjų kvadratai ir ne visi $a_{i,j} = 0, i \neq j$; b) būtų tik dviejų kintamųjų kvadratai; c) būtų tik vienas kintamųjų kvadratas; d) nėra kintamųjų kvadratų. Atsakymus pagrįskite.*

Sprendimas. Kvadratinės formos matricos visi pagrindiniai minorai turi būti teigiami.

7. *Nustatykite, kurios vektorinės erdvės V poaibiai U yra poerdviai: a)* $V = R^3, U = \{(x, y, z) : z = 3x + 2\}$; *b)* $V = R^2, U = \{(x, y) : xy \geq 0\}$; *c)*$V = M_{3\times 3}(R)$, $A-$ *fiksuota matrica iš* V, $U = \{X \in M_{3\times 3}(R) : XA = AX\}$.

Sprendimas. *a)* ir *b)*$-$ ne; *c)*$-$ taip. Tikrinti sąlygą: jei $u_1, u_2 \in U$, tai ir $a_1u_1 + a_2u_2 \in U$ su visais $a_1, a_2 \in R$.

8. *Polinomų skaliarinė sandauga apibrėžta lygybe* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x) q(x) dx$. *raskite polinomo* $f(x) = x^2$ *projekciją poerdvyje, generuotame polinomu* $g(x) = x$.

Sprendimas. Projekcija yra $\frac{(f,g)}{(g,g)} \cdot g(x) = \frac{3}{4}x$, nes $(f, g) = \int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ ir $(g, g) = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

9. *Tegu W yra R^n poerdvis, o $W^\perp-$ ortogonalusis W papildinys. Turime, kad su visais $a \in W$ teisinga $a = a_W + a_{W^\perp}$, čia a_W yra a projekcija poerdvyje W, o $a_{W^\perp}-$ a projekcija poerdvyje $W^\perp$. Įrodykite, kad* $\|a\| = \sqrt{\|a_W\|^2 + \|a_{W^\perp}\|^2}$.

Sprendimas. $\|a\| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{(a_W + a_{W^\perp}, a_W + a_{W^\perp})} = \sqrt{\|a_W\|^2 + \|a_{W^\perp}\|^2}$, nes $(a_W, a_{W^\perp}) = 0$.

10. *Tegu* $u, v, w \in R_3$ (stulpeliai) *ir A yra 3×3 matrica. Įrodykite, kad vektorių sistema u, v, w yra R_3 bazė tada, kada vektorių sistema Au, Av, Aw yra R_3 bazė.*

Sprendimas. $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = 0 \Longleftrightarrow A \cdot (a \cdot u + bv \cdot + cw \cdot) = A \cdot 0 = 0 \Longleftrightarrow a \cdot (A \cdot u) + b \cdot (A \cdot v) + c \cdot (A \cdot w) = 0$. Jeigu sistema Au, Av, Aw yra tiesiškai nepriklausoma, tai $a = b = c = 0$ ir todėl vektorių sistema u, v, w yra tiesiškai neprikausoma.

11. *Tegu v_1 ir v_2 yra tiesinio operatoriaus $T : V \to V$ tikriniai vektoriai, atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes λ_1 ir λ_2 . Įrodykite, kad vektoriai v_1 ir v_2 yra tiesiškai nepriklausomi.*

Sprendimas. Tegu $Tv_1 = \lambda_1 v_1$ ir $Tv_2 = \lambda_2 v_2$. Tegu $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$. Tada $T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 = 0$ ir $\lambda_2(c_1v_1 + c_2v_2) = \lambda_2c_1v_1 + \lambda_2c_2v_2 = 0$. Atėmę šias lygybes turėsime: $(\lambda_1 - \lambda_2) c_1v_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Analogiškai parodome, kad $c_2 = 0$.

Duota matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

12. *Raskite matricos A charakteristinį polinomą.*

Sprendimas. $(t-1)(t-4)^2$.

13. *Raskite matricos A minimalųjį polinomą.*

Sprendimas. $(t-1)(t-4)^2$.

14. *Raskite matricos A Žordano formą.*

Sprendimas. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Matricos C chatakteristinis polinomas yra $(x-2)^4(x-3)$.

15. *Kurie iš polinomų gali būti matricos C minimalieji polinomai:*

$a)\,(x-2)^3(x-3)^2$; $b)\,(x-1)^2(x-2)^2$; $c)\,(x-2)^2(x-3)$; $d)\,(x-3)^2$. Atsakymą pagrįsti.

Sprendimas. c). Minimalusis polinomas yra charakteristinio polinomo daliklis.

16. *Parašykite visas įmanomas skirtingas matricos C, kurios minimalusis polinomas iš 15., Žordano formas.*

Sprendimas. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.