Algebros egzaminas. 2 semestras. Informatika. 2001 06 15. Rimantas Grigutis

1.Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n, tarpusavyje pirminiais skaičiui 10, teisinga: $(n+20)^{n+20} \equiv n^n \pmod{10}$. Pasinaudokite Oilerio teorema.

2. Suformuluokite Oilerio teoremą ir iliustruokite ją ne mažiau kaip 4 pavyzdžiais.

3. Kurie iš polinomų yra neredukuojami virš Q : $a) x^2+3; b) x^2-169; c) x^3+x^2+x+1; d) x^3+2x^2+3x+4$. Atsakymus pagrįskite. Teiginiais, kuriais remiatės, įrodykite.

4. Parašykite kubines šaknis iš $-i$ (minus i) trigonometrine ir poline forma.

5. Išspręskite lygtį $((1-i)z)^3+i=0$ ir atsakymą parašykite algebrine forma.

6. Parašykite teigiamai apibrėžtą kvadratinę formą $f(x_1,x_2,x_3)$, kurioje $a)$ būtų visų kintamųjų kvadratai ir ne visi $a_{i,j}=0, i\neq j$; $b)$ būtų tik dviejų kintamųjų kvadratai; $c)$ būtų tik vienas kintamųjų kvadratas; $d)$ nėra kintamųjų kvadratų. Atsakymus pagrįskite.

7. Nustatykite, kurios vektorinės erdvės V poaibiai U yra poerdviai: $a)$ $V=R^3, U=\{(x,y,z): z=3x+2\}$; $b)$ $V=R^2, U=\{(x,y): xy\geq 0\}$; $c) V=M_{3\times 3}(R)$, $A-$ fiksuota matrica iš V, $U=\{X\in M_{3\times 3}(R): XA=AX\}$.

8. Polinomų skaliarinė sandauga apibrėžta lygybe $(f(x),g(x))=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. raskite polinomo $f(x)=x^2$ projekciją poerdvyje, generuotame polinomu $g(x)=x$.

9. Tegu W yra R^n poerdvis, o $W^{\perp}-$ ortogonalusis W papildinys. Turime, kad su visais $a\in W$ teisinga $a=a_W+a_{W^{\perp}}$, čia a_W yra a projekcija poerdvyje W, o $a_{W^{\perp}}-$ a projekcija poerdvyje $W^{\perp}$. Įrodykite, kad $\|a\|=\sqrt{\|a_W\|^2+\|a_{W^{\perp}}\|^2}$.

10. Tegu $u,v,w\in R_3$ (stulpeliai) ir A yra 3×3 matrica. Įrodykite, kad vektorių sistema u,v,w yra R_3 bazė tada ir tik tada, kada vektorių sistema Au,Av,Aw yra R_3 bazė.

11. Tegu v_1 ir v_2 yra tiesinio operatoriaus $T: V\to V$ tikriniai vektoriai, atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes λ_1 ir λ_2. Įrodykite, kad vektoriai v_1 ir v_2 yra tiesiškai nepriklausomi.

Duota matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

12. Raskite matricos A charakteristinį polinomą.

13. Raskite matricos A minimalųjį polinomą.

14. Raskite matricos A Žordano formą.

Matricos C chatakteristinis polinomas yra $(x-2)^4(x-3)$.

15. Kurie iš polinomų gali būti matricos C minimalieji polinomai:

$a)\,(x-2)^3(x-3)^2$; $b)\,(x-1)^2(x-2)^2$; $c)\,(x-2)^2(x-3)$; $d)\,(x-3)^2$. Atsakymą pagrįsti.

16. Parašykite visas įmanomas skirtingas matricos C, kurios minimalusis polinomas iš 15., Žordano formas.