

*Algebras egzaminas informatikams. 2001 05 31. Rimantas Grigutis.*

1.1. Raskite mažiausio laipsnio polinomą  $f(x)$ , kuris dalijasi iš  $x^2 + 1$ , o polinomas  $f(x) - 1$  dalijasi iš  $x^3 + 1$ .

1.2. Tegū  $g(x)$  ir  $h(x)$  yra duoti polinomai. ar visada egzistuoja toks polinomas  $f(x)$ , kuris dalijasi iš  $g(x)$ , o polinomas  $f(x) - 1$  dalijasi iš  $h(x)$ ? Atsakymą pagrįskite.

2. Tikslios  $\cos \frac{\pi}{5}$  reikšmės skaičiavimas.

2.1. Pasinaudoję Muavro formule, išreikškite  $\cos 5\alpha$  reiškiniumi  $\cos \alpha$ .

2.2. Įsitikinkite, kad gautoji 2.1 lygtis  $\cos \alpha$  atžvilgiu turi kartotines šaknis.

2.3. Raskite lygties iš 2.2 šaknis ir apskaičiuokite  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

3. Tegū  $V$  yra realioji vektorinė erdvė, o  $a, b, c$  - trys jos vektoriai ir  $u = b + c$ ,  $v = c + a$ ,  $w = a + b$ .

3.1. Įrodykite, kad tiesiniai apvalkalai, generuoti vektoriais  $a, b, c$  ir vektoriais  $u, v, w$  sutampa:  $[a, b, c] = [u, v, w]$ .

3.2. Įrodykite, kad vektorių sistema  $a, b, c$  yra tiesiškai nepriklausoma tada ir tik tada, kada tiesiškai nepriklausoma yra sistema  $u, v, w$ .

3.3. Tegū  $a, b, c$  yra tiesiškai nepriklausoma sistema. Raskite poerdvio  $U = [a, b, c]$  bazės  $u, v, w$  keitimo baze  $a, b, c$  matricą  $C$ . Įrodykite, kad taip apibrėžta matrica yra vienintėlė.

4. Duota matrica  $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

4.1. Raskite matricos  $A$  charakteristinį polinomą.

4.2. Raskite matricos  $A$  minimaųjį polinomą.

4.3. Raskite matricos  $A$  tikrines reikšmes.

4.4. Raskite matricos  $A$  tikrinius vektorius, atitinkančius visas tikrines reikšmes.

4.5. Raskite matricos  $A$  Žordano formą.

4.6. Ar visi tiesiškai nepriklausomi tikriniai matricos  $A$  vektoriai, atitinkantys visas tikrines reikšmes sudaro matricos  $A$  Žordano bazę? Atsakymą pagrįskite.