EGZAMINO UŽDUOTIS(1999-2000 m.m., 2 semestras)
Operatoriaus kanoninės matricos.

Duota operatoriaus $\mathcal{A} : \mathbf{R}^{10} \to \mathbf{R}^{10}$ matricos *Frobeniuso* forma A standartinėje bazėje.

1. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *Frobeniuso* formą.
2. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *Frobeniuso-Žordano* formą ir bazę.
3. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ plėtininio $\mathcal{A} : \mathbf{C}^{10} \to \mathbf{C}^{10}$ matricos *Žordano* formą ir bazę.
4. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *realiąją kanoninę* formą ir bazę.

1 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^4 (t + c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^3 (t + c)^s$.
$a = -2, -1, 1, 2, ;$ b yra toks iš $1, 2, 3, ..., 8$ kad $a^2 - 4b < 0$.
$c \geq 31$.
Jeigu $a > 0$, tai $s = 2$; jeigu $a < 0$, tai $s = 1$.

2 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^4 (t + c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b) (t + c)^s$.
$a = -4, -3, 3, 4$; b yra toks iš $3, ..., 10$ kad $a^2 - 4b < 0$.
$c \leq -30$.
Jeigu $a > 0$, tai $s = 2$; jeigu $a < 0$, tai $s = 1$.

3 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^4 (t + c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^2 (t + c)^s$.
$a = -6, -5, 5, 6$; b yra toks iš $6, ..., 13$ kad $a^2 - 4b < 0$.
$-30 \leq c \leq -1$.
Jeigu $a > 0$, tai $s = 2$; jeigu $a < 0$, tai $s = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} F^2 & O & O \\ O & F^2 & O \\ O & O & J \end{pmatrix},$$

čia F^2- polinomo $(t^2+at+b)^2$ lydinčioji matrica, o $J-$ polinomą $(t+c)^s$ atitinkanti matrica.

4 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t)=(t^2+at+b)^4(t+c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t)=(t^2+at+b)^2(t+c)^s$.
$a=-2,-1,1,2$; b yra toks iš $9,...,16$ kad $a^2-4b<0$.
$1\leq c\leq 30$.
Jeigu $a>0$, tai $s=2$; jeigu $a<0$, tai $s=1$.

$$A=\begin{pmatrix} F & O & O & O \\ O & F & O & O \\ O & O & F & O \\ O & O & O & J \end{pmatrix}$$

čia $F-$ polinomo t^2+at+b lydinčioji matrica, o $J-$ polinomą $(t+c)^s$ atitinkanti matrica.

ALGEBROS EGZAMINAS(1999-2000 m.m., 2 semestras)
1 ir 2 Informatikų grupės

1. Įrodykite: realiosios simetrinės matricos tikriniai vektoriai-stulpeliai, atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes, - ortogonalūs.

2. Įrodykite tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A}: U \to V$ savybes:

1) $\mathcal{A}(0) = 0$;

2) Jeigu $u_1, ..., u_n$ yra tiesiškai priklausoma U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), ..., \mathcal{A}(u_n)$ yra tiesiškai priklausoma V sistema;

3) Jeigu $u_1, ..., u_n$ yra generuojanti U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), ..., \mathcal{A}(u_n)$ yra generuojanti $\mathcal{A}(U)$ sistema.

3. Įrodykite: *jeigu vektorių sistemos* $v_1, ..., v_n$ *vektoriai yra vektorių sistemos* $u_1, ..., u_m$ *vektorių tiesinės kombinacijos, t.y.* $v_1, ..., v_n \in [u_1, ..., u_m]$, *ir vektorius* $v \in [v_1, ..., v_n]$, *tai* $v \in [u_1, ..., u_m]$.

4. Tegu $V = U \oplus W$. Tada poerdvis U vadinamas poerdvio W *tiesioginiu papildiniu.*Ar kievienam vektorinės erdvės poerdviui egzistuoja tiesioginis papildinys? Jeigu egzistuoja tai ar vienintėlis šis tiesioginis papildinys?Atsakymus pagrįskite. Pateikite pavyzdžius

5. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

čia $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \dfrac{df}{dx}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

6. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\begin{array}{lccccccc} & & & & & & & \circ \\ & & & & & & & | \\ \mathbf{D}_n\colon & \circ & - & \circ & - & \cdots & - & \circ \;, \text{ čia } n = 8 \text{ viršūnių}, \\ & & & & & & & | \\ & & & & & & & \circ \end{array}$$

kvadratinė forma F_{D_n} yra teigiamai apibrėžta.

7. Koks savijungio operatoriaus polinis skaidinys?

8. Raskite operatoriaus matricos $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ polinį skaidinį.

9. Raskite vektorių sistemos $(1, -2, 3), (2, 5, -6), (-2, 1, 4)$ Gramo matricą.

10. Raskite gretasienio apibrėžto vektorių sistema

$$(1, -2, 3), (2, 5, -6), (-2, 1, 4)$$

trimatį tūrį.

3 ir 4 Informatikų grupės

1. Įrodykite: normaliojo operatoriaus tikriniai vektoriai atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes yra ortogonalūs.

2. Kvadratinės formos $f = X^TAX$ *rangu* vadinamas matricos A rangas. Įrodykite, kad kvadratinės formas rangas yra lygus nenulinių matricos A tikrinių reikšmių skaičiui.

3. Tegu $v_1, ..., v_n-$ tiesiškai nepriklausoma sistema, o $v, v_1, ..., v_n-$ tiesiškai priklausoma sistema. Tada vektorius $v \in [v_1, ..., v_n]$

4. Tegu $V = U \oplus W$. Tada poerdvis U vadinamas poerdvio W *tiesioginiu papildiniu*.Ar kievienam vektorinės erdvės poerdviui egzistuoja tiesioginis papildinys? Jeigu egzistuoja tai ar vienintėlis šis tiesioginis papildinys?Atsakymus pagrįskite. Pateikite pavyzdžius.

5. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

čia $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$.
a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $2x - 1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.
b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$
$Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

6. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\begin{array}{lcccccccccl} \mathbf{E}_n: & \circ & - & \circ & - & \circ & \cdots - & \circ & - & \circ & ,\ \text{čia } n = 8 \text{ viršūnių.} \\ & & & & & | & & & & & \\ & & & & & \circ & & & & & \end{array}$$

7. Koks unitaraus operatoriaus polinis skaidinys?

8. Raskite operatoriaus matricos $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ polinį skaidinį.

9. Raskite vektorių sistemos $(2, -5, 4), (1, 1, 3), (-3, 6, 7)$ Gramo matricą.

10. Raskite gretasienio apibrėžto vektorių sistemos

$$(2, -5, 4), (1, 1, 3), (-3, 6, 7)$$

trimatį tūrį.