ALGEBROS EGZAMINAS(1999-2000 m.m., 1 semestras)

$\boxed{\text{V-1}}$ **1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2. Įrodykite: Vieneto šaknys ir jų savybės; primityviosios vieneto šaknys, vieneto šaknies primityvumo laipsnis; vieneto šaknų grupė; n -ojo laipsnio šaknų iš kompleksino skaičiaus reiškimas vieneto šaknimis.

3. Tegu $n = (a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0)_{10} = a_k 10^k + \cdots + a_0$.

$Q_s(n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_{is+s-1} ... a_{is+1} a_{is}),$

tada $n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_{is+s-1} ... a_{is+1} a_{is}) \cdot 10^{is}$

Įrodyti: su visais $n \in \mathbf{N}, s \in \mathbf{N}$ teisinga $n \equiv Q_s(n) \,(\bmod\, 10^s - 1)$.

4. $\cos 8x$ išreikšti funkcijomis $\cos x$ ir $\sin x$.

$\boxed{\text{V-2}}$ **1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2. Įrodykite. Eulerio ir mažoji Ferma teoremos.

3.Tegu $n = (a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0)_{10} = a_k 10^k + \cdots + a_0$.

$Q'_s(n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i (a_{is+s-1} ... a_{is+1} a_{is}).$

Įrodyti: su visais $n \in \mathbf{N}, s \in \mathbf{N}$ teisinga $n \equiv Q'_s(n) \,(\bmod\, 10^s + 1)$.

4.Funkciją $\cos^5 x$ išreikšti funkcijomis $\sin nx \; ir \; \cos mx$.

$\boxed{\text{V-3}}$ **1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2.Įrodykite: Primityviosios klasės; klasės turinčios atvirkštines.Vilsono teorema.

3. Parašykite daugybos lenteles žieduose $\mathbf{Z}_7$, $\mathbf{Z}_9$, $\mathbf{Z}_{11}$.

Išspręskite lygtis $x^2 = 1$ ir $x^2 = -1$ minėtuose žieduose.

4. Įrodykite, kad $S_n = \langle (1,2), (1,3), ..., (1,n) \rangle$.

$\boxed{\text{V-4}}$ **1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2.Įrodykite: Primityviosios klasės ir klasės, turinčios atvirkštines. Likinių klasių žiedo tapimo kūnu sąlygos.

3. Parašykite daugybos lenteles žieduose $\mathbf{Z}_8$, $\mathbf{Z}_{12}$.

Išspręskite lygtis $x^2 = 1$ ir $x^2 = -1$ minėtuose žieduose.

4. Įrodykite, kad $S_n = \langle (1,2), (2,3), ..., (n-1,n) \rangle$.

$\boxed{\text{V-5}}$ **1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2.Įrodykite: Teorema apie formalų ir funkcionalų polinomų tapatumą.

3. Tegu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$,

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Pararašykite keitinius

$\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

4. Kokios matricų aibės sudaro kūną įprastų operacijų matricoms atžvilgiu:
$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{Q}, n - \text{ fiksuotas sveikas skaičius} \right\}$.

$\boxed{\text{V-6}}$ **1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2.Įrodykite: Likinių klasių žiedo tapimo kūnu sąlygos(polinominis variantas).

3. Tegu $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 2 & 11 & 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, o $\sigma = (3, 8, 7) \in S_{11}$.
Pararašykite keitinius

$\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

4. Kokios matricų aibės sudaro kūną įprastų operacijų matricoms atžvilgiu:
$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{R}, n - \text{ fiksuotas sveikas skaičius} \right\}$.

$\boxed{\text{V-7}}$ **1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2.Įrodykite: Teoremos apie polinomo šaknų kartotinumą ir apie neredukuojamo daugiklio kartotinumą.

3. Tegu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$,

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Pararašykite keitinius

$\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

4. Kokios matricų aibės sudaro kūną įprastų operacijų matricoms atžvilgiu:

$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{Z}_3, n - \text{ fiksuotas sveikas skaičius} \right\}$.

$\boxed{\text{V-8.}}$**1. Pateikite formuluotes:**

1.1 .Kinų teorema liekanoms.

1.2. Keitiniai ir jų reiškimo būdai (pavyzdžiai); keitinių grupė; transpozicijos, lyginiai, nelyginiai keitiniai; keitinio ženklas, teiginys apie keitinio ženklą; Keli (Cayley) teorema.

1.3. Prijungtoji matrica; atvirkštinė matrica ir jos vienatinumas; matricų, turinčių atvirkštines, ekvivalentūs apibrėžimai. Kramerio formulės.

2.Įrodykite: Neredukuojami polinomai virš **R** ir virš **C**. Kompleksiniai skaičiai kaip likinių klasių kūnas.

3. Tegu $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 2 & 11 & 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, o $\sigma = (3, 8, 7) \in S_{11}$

. Pararašykite keitinius

$\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

4. Kokios matricų aibės sudaro kūną įprastų operacijų matricoms atžvilgiu:

$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{Z}_2, n - \text{ fiksuotas sveikas skaičius} \right\}$.

ALGEBROS EGZAMINAS (1999-2000 m.m., 1 semestras)

1. Kuris iš lyginių turi sprendinį? Išspręskite šį lyginį.
A.$2x \equiv 7 \pmod 4$ .B.$2x \equiv 7 \pmod 5$ .C. $3x \equiv 7 \pmod 9$ .D.$3x \equiv 5 \pmod{12}$.
2. Raskite trigonometrinę kompleksinio skaičiaus $\sqrt{3} - i$ išraišką.
3. Raskite matricos $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ rangą.
4. Sudauginkite matricas: $B \cdot C$ ir $C \cdot B$, čia
$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.
5. Raskite matricos $D = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą.
6. Apskaičiuokite determinantą $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.
7. Parašykite polinomo $f(x) = x^3$ skleidinio dvinariais $x - 2$ Teiloro formulę.
8. Raskite natūraliuosius n ir m tenkinančius sistemą $\begin{cases} n + m = 180 \\ DBD(n, m) = 30 \end{cases}$.
9. Neredukuojamų virš $\mathbf{R}$ polinomų laipsnis gali būti (pabraukti):
0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; bet koks .
10. Kiek inversijų sudarys 10-os eilės kėlinyje 1 , jei jis yra 4 vietoje(pabraukti):
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 .
11. n-ojo laipsnio polinomo virš kūno galimas šaknų skaičius visada yra :
a) =1; b)≥ 1; c)=2; d)≥ 2; e)$\leq n$; f) $= n$; g) $>n$.
12. Išskaidykite polinomą $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \in \mathbf{Q}[x]$ dauginamaisiais virš kūno **Q.**
13. Nurodykite tokį natūralųjį m, kad polinomas $x^5 + x^3 + x^2 - 15$ dalytųsi iš polinomo $x^3 + 5$ be liekanos žiede $\mathbf{Z}_m[x]$.
14. Suformuluokite Eulerio ir mažąją Ferma teoremas.
15. Parašykite 6-ojo laipsnio primityviąsias vieneto šaknis.
16. Parašykite Lagranžo interpoliacinį polinomą lentelei:

x	0	1	-1	3
$f(x)$	0	1	1	9

.

ATSAKYMAI.

1. B. $x = 1$.
2. $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$.
3. $rankA = 2$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 & -2 \\ 33 & -13 & 14 & 39 \end{pmatrix}$.
5. $D = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, atvirkštinė: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$.
6. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -180$.
7. $8 + \frac{12}{1!}(x-2) + \frac{12}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3$.
8. $n = 120, m = 30$.
9. 1 ir 2.
10. 3.
11. e)$\leq n$.
12. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$.
13. $m = 2$.
14. *Eulerio teorema.* Tegu a ir m yra tarpusavyje pirminiai, tai $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m)$.

Mažoji Ferma teorema. Tegu p - pirminis skaičius, o a nesidalija iš p , tai $a^{p-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$.

15. $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}, \varepsilon_5 = \cos\frac{2\pi\cdot 5}{6} + i\sin\frac{2\pi\cdot 5}{6}$.
16. $f(x) = x^2$.

EGZAMINO UŽDUOTIS(1999-2000 m.m., 2 semestras)
Operatoriaus kanoninės matricos.

Duota operatoriaus $\mathcal{A} : \mathbf{R}^{10} \to \mathbf{R}^{10}$ matricos *Frobeniuso* forma A standartinėje bazėje.

1. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *Frobeniuso* formą.
2. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *Frobeniuso-Žordano* formą ir bazę.
3. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ plėtininio $\mathcal{A} : \mathbf{C}^{10} \to \mathbf{C}^{10}$ matricos *Žordano* formą ir bazę.
4. Parašykite operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *realiąją kanoninę* formą ir bazę.

1 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^4 (t + c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^3 (t + c)^s$.
$a = -2, -1, 1, 2, ;$ b yra toks iš $1, 2, 3, ..., 8$ kad $a^2 - 4b < 0$.
$c \geq 31$.
Jeigu $a > 0$, tai $s = 2$; jeigu $a < 0$, tai $s = 1$.

2 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^4 (t + c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b) (t + c)^s$.
$a = -4, -3, 3, 4;$ b yra toks iš $3, ..., 10$ kad $a^2 - 4b < 0$.
$c \leq -30$.
Jeigu $a > 0$, tai $s = 2$; jeigu $a < 0$, tai $s = 1$.

3 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^4 (t + c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + at + b)^2 (t + c)^s$.
$a = -6, -5, 5, 6;$ b yra toks iš $6, ..., 13$ kad $a^2 - 4b < 0$.
$-30 \leq c \leq -1$.
Jeigu $a > 0$, tai $s = 2$; jeigu $a < 0$, tai $s = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} F^2 & O & O \\ O & F^2 & O \\ O & O & J \end{pmatrix},$$

čia F^2- polinomo $\left(t^2+at+b\right)^2$ lydinčioji matrica, o $J-$ polinomą $(t+c)^s$ atitinkanti matrica.

4 grupei.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\left(t^2+at+b\right)^4(t+c)^2$.
Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas: $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\left(t^2+at+b\right)^2(t+c)^s$.
$a=-2,-1,1,2$; b yra toks iš $9,...,16$ kad $a^2-4b<0$.
$1\leq c\leq 30$.
Jeigu $a>0$, tai $s=2$; jeigu $a<0$, tai $s=1$.

$$A=\begin{pmatrix} F & O & O & O \\ O & F & O & O \\ O & O & F & O \\ O & O & O & J \end{pmatrix}$$

čia $F-$ polinomo t^2+at+b lydinčioji matrica, o $J-$ polinomą $(t+c)^s$ atitinkanti matrica.

ALGEBROS EGZAMINAS(1999-2000 m.m., 2 semestras)
1 ir 2 Informatikų grupės

1. Įrodykite: realiosios simetrinės matricos tikriniai vektoriai-stulpeliai, atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes, - ortogonalūs.

2. Įrodykite tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A} : U \to V$ savybes:

1) $\mathcal{A}(0) = 0$;

2) Jeigu $u_1, ..., u_n$ yra tiesiškai priklausoma U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), ..., \mathcal{A}(u_n)$ yra tiesiškai priklausoma V sistema;

3) Jeigu $u_1, ..., u_n$ yra generuojanti U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), ..., \mathcal{A}(u_n)$ yra generuojanti $\mathcal{A}(U)$ sistema.

3. Įrodykite: *jeigu vektorių sistemos* $v_1, ..., v_n$ *vektoriai yra vektorių sistemos* $u_1, ..., u_m$ *vektorių tiesinės kombinacijos, t.y.* $v_1, ..., v_n \in [u_1, ..., u_m]$, *ir vektorius* $v \in [v_1, ..., v_n]$, *tai* $v \in [u_1, ..., u_m]$.

4. Tegu $V = U \oplus W$. Tada poerdvis U vadinamas poerdvio W *tiesioginiu papildiniu.*Ar kievienam vektorinės erdvės poerdviui egzistuoja tiesioginis papildinys? Jeigu egzistuoja tai ar vienintėlis šis tiesioginis papildinys?Atsakymus pagrįskite. Pateikite pavyzdžius

5. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \dfrac{df}{dx}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

6. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\begin{array}{lc} & \circ \\ & | \\ \mathbf{D}_n\text{:} \ \circ - \circ - \cdots - & \circ \ \text{, čia } n = 8 \text{ viršūnių,} \\ & | \\ & \circ \end{array}$$

kvadratinė forma F_{D_n} yra teigiamai apibrėžta.

7. Koks savijungio operatoriaus polinis skaidinys?

8. Raskite operatoriaus matricos $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ polinį skaidinį.

9. Raskite vektorių sistemos $(1, -2, 3), (2, 5, -6), (-2, 1, 4)$ Gramo matricą.

10. Raskite gretasienio apibrėžto vektorių sistema

$$(1, -2, 3), (2, 5, -6), (-2, 1, 4)$$

trimatį tūrį.

3 ir 4 Informatikų grupės

1. Įrodykite: normaliojo operatoriaus tikriniai vektoriai atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes yra ortogonalūs.

2. Kvadratinės formos $f = X^TAX$ *rangu* vadinamas matricos A rangas. Įrodykite, kad kvadratinės formas rangas yra lygus nenulinių matricos A tikrinių reikšmių skaičiui.

3. Tegu $v_1, ..., v_n-$ tiesiškai nepriklausoma sistema, o $v, v_1, ..., v_n-$ tiesiškai priklausoma sistema. Tada vektorius $v \in [v_1, ..., v_n]$

4. Tegu $V = U \oplus W$. Tada poerdvis U vadinamas poerdvio W *tiesioginiu papildiniu.*Ar kievienam vektorinės erdvės poerdviui egzistuoja tiesioginis papildinys? Jeigu egzistuoja tai ar vienintėlis šis tiesioginis papildinys?Atsakymus pagrįskite. Pateikite pavyzdžius.

5. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

čia $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$.
a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $2x - 1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.
b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

6. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\begin{array}{llllllll} \mathbf{E}_n\colon & \circ - & \circ - & \circ & \cdots - & \circ - & \circ\,, & \text{čia } n = 8 \text{ viršūnių.} \\ & & & | & & & & \\ & & & \circ & & & & \end{array}$$

7. Koks unitaraus operatoriaus polinis skaidinys?

8. Raskite operatoriaus matricos $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ polinį skaidinį.

9. Raskite vektorių sistemos $(2, -5, 4), (1, 1, 3), (-3, 6, 7)$ Gramo matricą.

10. Raskite gretasienio apibrėžto vektorių sistemos

$$(2, -5, 4), (1, 1, 3), (-3, 6, 7)$$

trimatį tūrį.