

**ALGEBROS EGZAMINAS( 1998-1999 m.m., 2 semestras)**

1. Tegu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.

Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :

$$u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, u_3 = v_1 + v_2 + v_3, \dots, u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n .$$

2. Tegu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.

Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :

$$u_1 = v_1, u_2 = v_1 + 2v_2, u_3 = v_1 + 2v_2 + 3v_3, \dots, u_n = v_1 + 2v_2 + \dots + nv_n .$$

3. Tegu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.

Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_3 + v_4, \dots, u_{n-1} = v_{n-1} + v_n, u_n = v_n + v_1 .$$

4. Tegu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.

Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :

$$u_1 = v_1 - v_2, u_2 = v_2 - v_3, u_3 = v_3 - v_4, \dots, u_{n-1} = v_{n-1} - v_n, u_n = v_n - v_1 .$$

5. Duota vektorių sistema

$$v_1 = (0, 1, 0, 2, 0), v_2 = (7, 4, 1, 8, 3), v_3 = (0, 3, 0, 4, 0), v_4 = (1, 9, 5, 7, 1),$$

$$v_5 = (0, 1, 0, 5, 0) .$$

Ar egzistuoja tokie skaičiai  $c_{ij}$  , kad vektoriai

$$u_i = \sum_{j=1}^5 c_{ij} v_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

tiesiškai nepriklausomi ?

6. Tegu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.

Raskite vektorių sistemos

$$u_1 = v_1 - v_2, u_2 = v_2 - v_3, u_3 = v_3 - v_4, \dots, u_{n-1} = v_{n-1} - v_n, u_n = v_n - v_1$$

visas bazes ( t.y. visus tiesiškai nepriklausomus posistemius).

7. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį visais pirminių skaičių moduliais, išskyrus baigtinį jų skaičių. Išspręskite sistemą šiais moduliais.

8. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį visais pirminių skaičių moduliais, išskyrus baigtinį jų skaičių. Išspręskite sistemą šiais moduliais.

9. Raskite didžiausią trečios eilės determinantą, sudarytą iš 0 ir 1.

10. Raskite didžiausią trečios eilės determinantą, sudarytą iš -1 ir 1.

11. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį visais pirminių skaičių moduliais, išskyrus baigtinį jų skaičių. Išspręskite sistemą šiais moduliais.

12. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Q} \right\}, n - \text{fiksotas sveikas skaičius,}$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

13. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{R} \right\}, n - \text{fiksotas sveikas skaičius,}$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

14. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 2$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

15. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 3$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

16. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 5$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

17. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 7$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

18. Tegu žymuo  $\sqrt[n]{z}$  žymi  $n$ -ojo laipsnio šaknų iš kompleksinio skaičiaus  $z$  aibę.

Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{z^n \cdot w} = z \cdot \sqrt[n]{w},$$

kur  $z, w \in \mathbf{C}$ , o aibė  $z \cdot \sqrt[n]{w}$  yra lygi  $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$ ?

19. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{-z^n \cdot w} = -z \cdot \sqrt[n]{w},$$

kur  $z, w \in \mathbf{C}$ , o aibė  $z \cdot \sqrt[n]{w}$  yra lygi  $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$ ?

20. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{z \cdot w} = u \cdot \sqrt[n]{w},$$

kur  $z, w \in \mathbf{C}$ , aibė  $z \cdot \sqrt[n]{w}$  yra lygi  $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$ , o  $u$  - viena iš  $\sqrt[n]{z}$  reikšmių ?

21. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{z} \cup \sqrt[n]{-z} = \sqrt[2n]{z^2},$$

kur  $z, w \in \mathbf{C}$ , o aibė  $z \cdot \sqrt[n]{w}$  yra lygi  $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$ ?

22. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[s]{z^s} = \sqrt[s]{z}, s > 1$$

kur  $z, w \in \mathbf{C}$ , o aibė  $z \cdot \sqrt[n]{w}$  yra lygi  $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$ ?

## ALGEBROS EGZAMINAS (1998-1999 m.m., 2 semestras)

1. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $1, x, x^2$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $\text{Ker}\mathcal{D}$ ,  $\text{Im}\mathcal{D}$ ,  $\text{Ker}\mathcal{D}^*$ ,  $\text{Im}\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

2. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $\text{Ker}\mathcal{D}$ ,  $\text{Im}\mathcal{D}$ ,  $\text{Ker}\mathcal{D}^*$ ,  $\text{Im}\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

3. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $\text{Ker}\mathcal{D}, \text{Im}\mathcal{D}, \text{Ker}\mathcal{D}^*, \text{Im}\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

4. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $1, x, x^2$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $\text{Ker}\mathcal{D}, \text{Im}\mathcal{D}, \text{Ker}\mathcal{D}^*, \text{Im}\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

5. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

6. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

7. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $1, x, x^2$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

8. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

9. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

čia  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  matricas bazėje  $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ .

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$   $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$ .

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus  $\mathcal{D}$  ir jungtinio operatoriaus  $\mathcal{D}^*$  Žordano bazes ir matricas.

**ALGEBROS EGZAMINAS (1998-1999m.m., 2 semestras)**

1. Neorientuotam grafiui  $\mathbf{G}$ , kurio viršūnės  $v_1, \dots, v_n$ , priskiriame kvadratinę formą  $F_G = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ , čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\mathbf{A}_n: \circ - \circ - \dots - \circ - \circ, \text{ čia } n \text{ viršūnių,}$$

kvadratinė forma  $F_{A_n}$  yra teigiamai apibrėžta.

2. Neorientuotam grafiui  $\mathbf{G}$ , kurio viršūnės  $v_1, \dots, v_n$ , priskiriame kvadratinę formą  $F_G = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ , čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\mathbf{D}_n: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \dots - \circ \\ | \\ \circ \end{array}, \text{ čia } n \text{ viršūnių,}$$

kvadratinė forma  $F_{D_n}$  yra teigiamai apibrėžta.



3. Neorientuotam grafiui  $\mathbf{G}$ , kurio viršūnės  $v_1, \dots, v_n$ , priskiriame kvadratinę formą  $F_G = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ , čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\mathbf{E}_n: \begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & \cdots & - & \circ & - & \circ \\ & & & & & & & | & & \\ & & & & & & & \circ & & \end{array}, \text{ čia } n = 6, 7, 8 \text{ viršūnių,}$$

kvadratinė forma  $F_{E_n}$  yra teigiamai apibrėžta.

4. Neorientuotam grafiui  $\mathbf{G}$ , kurio viršūnės  $v_1, \dots, v_n$ , priskiriame kvadratinę formą  $F_G = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ , čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\tilde{\mathbf{E}}_7: \begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & & & | & & & & \\ & & & & & & \circ & & & & \end{array},$$

kvadratinė forma  $F_{\tilde{E}_7}$  yra teigiamai pusapibrėžta, t.y.  $F_{\tilde{E}_7}(x_1, x_2) \geq 0$  su visais  $x_1, x_2$ .



7. Neorentuotam grafui  $\mathbf{G}$ , kurio viršūnės  $v_1, \dots, v_n$ , priskiriame kvadratinę formą  $F_G = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ , čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\tilde{\mathbf{D}}_n: \begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ | & & | \\ \circ & - \circ - \dots - & \circ \\ | & & | \\ \circ & & \circ \end{array}, \text{ čia } n + 1 \text{ viršūnė,}$$

kvadratinė forma  $F_{\tilde{\mathbf{D}}_n}$  yra teigiamai pusapibrėžta, t.y.  $F_{\tilde{\mathbf{D}}_n}(x_1, x_2) \geq 0$  su visais  $x_1, x_2$ .

8. Neorentuotam grafui  $\mathbf{G}$ , kurio viršūnės  $v_1, \dots, v_n$ , priskiriame kvadratinę formą  $F_G = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ , čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\tilde{\mathbf{A}}_n: \begin{array}{ccc} \circ & - & \circ \\ | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \\ \circ & - & \circ \end{array}, \text{ čia } n + 1 \text{ viršūnė,}$$

kvadratinė forma  $F_{\tilde{\mathbf{A}}_n}$  yra teigiamai pusapibrėžta, t.y.  $F_{\tilde{\mathbf{A}}_n}(x_1, x_2) \geq 0$  su visais  $x_1, x_2$ .