ALGEBROS EGZAMINO TESTAS(1998-1999 m.m., 1 semestras)

1. Išskaidykite polinomą $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \in \mathbf{Q}[x]$ dauginamaisiais virš kūno $\mathbf{Q}$.

2. Išspręskite sistemą $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$.

3. Nurodykite tokį natūralųjį m, kad polinomas $x^5 + x^3 + x^2 - 15$ dalytųsi iš polinomo $x^3 + 5$ be liekanos žiede $\mathbf{Z}_m[x]$.

4. Raskite trigonometrinę kompleksinio skaičiaus $\sqrt{3} - i$ išraišką.

5. Raskite homogeninės tiesinių lygčių sistemos,
kurios matrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, sprendinių vektorinės erdvės dimensija.œ

6. Sudauginkite matricas $A \cdot B$ ir $B \cdot A$, kur
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Raskite matricos $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą.

8. Raskite natūraliuosius n ir m tenkinančius sistemą $\begin{cases} n + m = 180 \\ DBD(n, m) = 30 \end{cases}$.

9. Apskaičiuokite determinantą $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

10. Parašykite polinomo $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ skleidinio dvinariais $x - a$ Teiloro formulę:
$f(x) = x^3$, $a = 2$.

11.Aprašykite neredukuojamus polinomus virš kūno $\mathbf{R}$ ir virš kūno $\mathbf{C}$.

12.Pateikite tris ekvivalenčius vektorinės erdvės bazės apibrėžimus.

13.Kiek inversijų sudarys n-os eilės kėlinyje 1, jei jis stovi k-toje vietoje?

14.Suformuluokite Eulerio ir mažąją Ferma teoremas.

15.Parašykite 6-ojo laipsnio primityviąsias vieneto šaknis.

ALGEBROS EGZAMINAS(1998-1999 m.m., 2 semestras)

1. Tegu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.
Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :
$u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, u_3 = v_1 + v_2 + v_3, \ldots, u_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
2. Tegu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.
Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :
$u_1 = v_1, u_2 = v_1 + 2v_2, u_3 = v_1 + 2v_2 + 3v_3, \ldots, u_n = v_1 + 2v_2 + \cdots + nv_n$.
3. Tegu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.
Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :
$u_1 = v_1, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_3 + v_4, \ldots, u_{n-1} = v_{n-1} + v_{n,} u_n = v_n + v_1$.
4. Tegu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.
Ar tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema :
$u_1 = v_1 - v_2, u_2 = v_2 - v_3, u_3 = v_3 - v_4, \ldots, u_{n-1} = v_{n-1} - v_{n,} u_n = v_n - v_1$.
5. Duota vektorių sistema
$v_1 = (0, 1, 0, 2, 0), v_2 = (7, 4, 1, 8, 3), v_3 = (0, 3, 0, 4, 0), v_4 = (1, 9, 5, 7, 1),$
$v_5 = (0, 1, 0, 5, 0).$
Ar egzistuoja tokie skaičiai c_{ij} , kad vektoriai

$$u_i = \sum_{j=1}^{5} c_{ij} v_j \ (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

tiesiškai nepriklausomi ?
6. Tegu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.
Raskite vektorių sistemos
$u_1 = v_1 - v_2, u_2 = v_2 - v_3, u_3 = v_3 - v_4, \ldots, u_{n-1} = v_{n-1} - v_{n,} u_n = v_n - v_1$
visas bazes (t.y. visus tiesiškai nepriklausomus posistemius).
7. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį visais pirminių skaičių moduliais, išskyrus baigtinį jų skaičių. Išspręskite sistemą šiais moduliais.
8. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį visais pirminių skaičių moduliais, išskyrus baigtinį jų skaičių. Išspręskite sistemą šiais moduliais.

9. Raskite didžiausią trečios eilės determinantą, sudarytą iš 0 ir 1.

10. Raskite didžiausią trečios eilės determinantą, sudarytą iš -1 ir 1.

11. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį visais pirminių skaičių moduliais, išskyrus baigtinį jų skaičių. Išspręskite sistemą šiais moduliais.

12. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Q} \right\}, n \text{ - fiksuotas sveikas skaičius,}$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

13. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{R} \right\}, n \text{ - fiksuotas sveikas skaičius,}$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

14. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 2$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

15. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 3$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

16. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 5$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

17. Ar matricų aibė

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{Z}_p \right\}, p = 7$$

matricų veiksmų atžvilgiu sudaro kūną ?

18. Tegu žymuo $\sqrt[n]{z}$ žymi n-ojo laipsnio šaknų iš kompleksinio skaičiaus z aibę.

Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{z^n \cdot w} = z \cdot \sqrt[n]{w},$$

kur $z, w \in \mathbf{C}$, o aibė $z \cdot \sqrt[n]{w}$ yra lygi $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$?

19. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{-z^n \cdot w} = -z \cdot \sqrt[n]{w},$$

kur $z, w \in \mathbf{C}$, o aibė $z \cdot \sqrt[n]{w}$ yra lygi $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$?

20. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{z \cdot w} = u \cdot \sqrt[n]{w},$$

kur $z, w \in \mathbf{C}$, aibė $z \cdot \sqrt[n]{w}$ yra lygi $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$, o u - viena iš $\sqrt[n]{z}$ reikšmių ?

21. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[n]{z} \cup \sqrt[n]{-z} = \sqrt[2n]{z^2},$$

kur $z, w \in \mathbf{C}$, o aibė $z \cdot \sqrt[n]{w}$ yra lygi $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$?

22. Ar teisinga ši aibių lygybė:

$$\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}, s > 1$$

kur $z, w \in \mathbf{C}$, o aibė $z \cdot \sqrt[n]{w}$ yra lygi $\{z \cdot a; a \in \sqrt[n]{w}\}$?

ALGEBROS EGZAMINAS (1998-1999 m.m., 2 semestras)

1. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $1, x, x^2$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

2. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

3. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

4. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = f(-1)\, g(-1) + f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1)$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $1, x, x^2$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

5. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = f(-1)\, g(-1) + f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1)$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

6. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = f(-1)\, g(-1) + f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1)$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

7. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,$$

čia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D} : f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $1, x, x^2$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

8. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx,$$

čia $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D}: f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x, x^2-1, \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

9. Neaukštesnio kaip 2-ojo laipsnio polinomų su realiaisiais koeficientais realioje vektorinėje erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx,$$

čia $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$.

a) Raskite diferencijavimo operatoriaus

$$\mathcal{D}: f(x) \longrightarrow \frac{df}{dx}$$

ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ matricas bazėje $1, x, \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

b) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ $Ker\mathcal{D}, Im\mathcal{D}, Ker\mathcal{D}^*, Im\mathcal{D}^*$.

c) Raskite diferencijavimo operatoriaus $\mathcal{D}$ ir jungtinio operatoriaus $\mathcal{D}^*$ Žordano bazes ir matricas.

ALGEBROS EGZAMINAS (1998-1999m.m., 2 semestras)

1. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\mathbf{A}_n\colon \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ \text{ , čia } n \text{ viršūnių,}$$

kvadratinė forma F_{A_n} yra teigiamai apibrėžta.

2. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\begin{array}{l} \phantom{\mathbf{D}_n\colon \circ - \circ - \cdots - {}} \circ \\ \phantom{\mathbf{D}_n\colon \circ - \circ - \cdots - {}} | \\ \mathbf{D}_n\colon \circ - \circ - \cdots - \circ \text{ , čia } n \text{ viršūnių,} \\ \phantom{\mathbf{D}_n\colon \circ - \circ - \cdots - {}} | \\ \phantom{\mathbf{D}_n\colon \circ - \circ - \cdots - {}} \circ \end{array}$$

kvadratinė forma F_{D_n} yra teigiamai apibrėžta.

3. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\begin{array}{l} \mathbf{E}_n\!: \circ - \circ - \circ \;\cdots - \circ - \circ \text{ , čia } n = 6, 7, 8 \text{ viršūnių,} \\ \phantom{\mathbf{E}_n\!: \circ - \circ - }\,| \\ \phantom{\mathbf{E}_n\!: \circ - \circ - }\circ \end{array}$$

kvadratinė forma F_{E_n} yra teigiamai apibrėžta.

4. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_7\!: \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \text{ ,} \\ \phantom{\tilde{\mathbf{E}}_7\!: \circ - \circ - \circ - }\,| \\ \phantom{\tilde{\mathbf{E}}_7\!: \circ - \circ - \circ - }\circ \end{array}$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{E}_7}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{E}_7}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2.

5. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\tilde{\mathbf{E}}_8\colon \begin{array}{ccccccccccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & | & & & & & & & & & & \\ & & & & \circ & & & & & & & & & & \end{array},$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{E}_8}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{E}_8}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2.

6. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\tilde{\mathbf{E}}_6\colon \begin{array}{ccccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \circ & & & & \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array},$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{E}_6}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{E}_6}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2.

7. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\tilde{\mathbf{D}}_n:\ \begin{array}{ccccccc} \circ & & & & & & \circ \\ | & & & & & & | \\ \circ & - & \circ & - & \cdots & - & \circ \\ | & & & & & & | \\ \circ & & & & & & \circ \end{array}, \text{ čia } n+1 \text{ viršūnė,}$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{D}_n}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{D}_n}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2.

8. Neorentuotam grafui $\mathbf{G}$, kurio viršūnės $v_1, ..., v_n$, priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Įrodykite, kad grafo

$$\tilde{\mathbf{A}}_n:\ \begin{array}{ccc} \circ & - & \circ \\ | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \\ \circ & - & \circ \end{array}, \text{ čia } n+1 \text{ viršūnė,}$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{A}_n}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{A}_n}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2.