KŪNŲ TEORIJA

2000 metų rudens paskaitos

Paskaitų ciklas remiasi tiek bendruoju algebros kursu, skaitomu informatikams pirmame ir antrame semestruose, tiek ir diskretinės matematikos kursu, kuris skirtas baigtinėms algebrinėms struktūroms, skaitomu informatikams tečiajame semestre.

1. Kūnų plėtiniai

Apibrėžimas 1.1 *Jeigu $K \subseteq F$ ir K, F yra kūnai tų pačių operacijų atžvilgiu, tai kūnas K vadinamas kūno F pokūniu, o kūnas F vadinamas **kūno K plėtiniu** ir žymima F/K .*

Prisiminkime vektorinės erdvės apibrėžimą .

Apibrėžimas 1.2 Vektorinė erdvė *virš kūno K yra tokia adityvioji Abelio grupė V, kad egzistuoja funkcija $* : K \times V \to V$, pasižyminti savybėmis:*
1. $(ab) * x = a * (b * x)$ su visais $a, b \in K$ ir $x \in V$.
2. $(a + b) * x = a * x + b * x$ su visais $a, b \in K$ ir $x \in V$.
3. $a * (x + y) = a * x + b * y$ su visais $a, b \in K$ ir $x \in V$.
4. $1 * x = x$ su visais $x \in V$.

Sekanti lema mums parodys, kad žinios iš tiesinės algebros kurso palengvina mūsų kūnų plėtinių tyrimą.

Lema 1.3 *Jeigu F/K yra kūno plėtinys, tai F yra vektorinė erdvė virš K.*

Įrodymas. Kaip žinia, kūnas F yra adityvioji Abelio grupė. Funkciją $*$: $K \times F \to F$ galima apibrėžti tokiu būdu: $k * x = kx$, čia antroji sandauga - tai kūno F elementų sandauga. Dabar nesunku tiesiogiai patikrinti, kad taip apibrėžta funkcija $*$ tenkina apibrėžimo 1.2 savybes 1-4 ir tuo pačiu F tampa vektorine erdve virš kūno K.

Įrodyta.

Taigi, jeigu F/K yra kūno plėtinys, tai mes galime apibrėžti šio **plėtinio laipsnį** kaip vektorinės erdvės dimensiją: $[F:K] = \dim_K(F)$. Tokiu būdu, $[F:K]$ yra vektorinės erdvės F virš kūno K bazėje esančių elementų skaičius.

Prisiminkime. Tegu V yra vektorinė erdvė virš kūno K. Tegu B yra netuščias V poaibis. Tada $K-$ **tiesiniu apvalkalu**, generuotu aibe B (arba tiesiog tiesiniu apvalkalu) vadiname aibę, kurios elementais yra visos baigtinės tiesinės kombinacijos

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \text{ su visais } a_1, ..., a_n \in K \text{ ir } v_1, ..., v_n \in B.$$

Aibė B vadinama **tiesiškai nepriklausoma** virš K , jeigu su visais $n \in N$ ir su visais $v_1, ..., v_n \in B$ vienintėliu lygties

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

sprendiniu $a_1, ..., a_n \in K$ atžvilgiu yra $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Aibė $B \subseteq V$ vadinama vektorinės erdvės V $K-$ **baze** (arba tiesiog baze), jeigu ji yra tiesiškai nepriklausoma virš K, ir tiesinis apvalkalas, generuotas aibe B, sutampa su V.

Tegu dabar F/K yra kūno plėtinys yra $u \in F$. Žymeniu $K(u)$ žymėsime mažiausią kūno F pokūnį, kuriame yra ir kūnas K ir elementas u. Taigi su kiekvienu kūno F tokiu pokūniu E, kad $K \subseteq E$ ir $u \in E$ turime $K(u) \subseteq E$. Plėtinį $K(u)/K$ vadina **paprastuoju plėtiniu**. Panašiai ir baigtiniui elementų $u_1, ..., u_n \in F$ rinkiniui mes galime apibrėžti kūną $K(u_1, ..., u_n)$, kuris yra mažiausias kūno F pokūnis, kuriame yra ir kūnas K ir elementai $u_1, ..., u_n$. Bendru atveju, su kiekviena aibe $X \subseteq F$, mes galime apibrėžti kūną $K(X)$ kaip mažiausią kūno F pokūnį,kuriame yra ir kūnas K ir aibė X.

Visų pirma, mes atidžiau pažiūrėsime į paprastuosius plėtinius. Tegu dabar F/K yra kūno plėtinys ir $u \in F$. Tada egzistuoja **įverčio homomorfizmas** $\phi_u : K[x] \to F$, apibrėžtas formule $\phi_u\left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_iu^i$ su visais $n \in N$ ir su visais $a_0, ..., a_n \in K$. (Tikrai nesunku įsitikinti, kad ϕ_u yra homomorfizmas, pastebėjus, kad $\phi_u(p) = p(u)$ su visais $p \in K[x]$.) Beto, nesunku matyti, kad $\text{Im}\phi_u \subseteq K(u)$, nes $K(u)$ yra uždaras tiek sudėties, tiek sandaugos atžvilgiu.

Apibrėžimas 1.4 *Tegu F/K yra kūno plėtinys. Elementas $u \in F$ vadinamas* ***algebriniu virš kūno*** K *, jeigu egzistuoja toks nenulinis $p \in K[x]$, kad*

$p(u) = 0$. *(Tai ekvivalentu sąlygai* $\ker(\phi_u) \neq 0$. *) Elementas* $u \in F$ *vadinamas* ***transcendentiniu virš kūno*** K *, jeigu jis nėra algebrinis virš* K. *(Tai ekvivalentu sąlygai* $\ker(\phi_u) = 0$. *) Kūnas* F *vadinamas* **algebriniu virš** K*, jeigu visi kūno* F *elementai yra algebriniai virš* K. *Kūnas* F *vadinamas* ***transcendentiniu virš*** K *, jeigu* F *nėra algebrinis virš* K.

Teorema 1.5 *Tegu* F/K *yra kūno plėtinys ir* $u \in F$.
1. Jeigu u *yra transcendentinis virš* K*, tai* $K(u) \cong K(x)$.
2. Jeigu u *yra algebrinis virš* K*, tai* $K(u) \cong K[x] / \langle p \rangle$ *su visiškai apibrėžtu neredukuojamu polinomu* $p \in K[x]$. *Beto, aibė* $\{1, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$, *čia* $n = [K(u) : K] = \deg(p)$, *yra* $K(u)$ *bazė.*

Įrodymas. (1) Tegu u yra transcendentinis virš K. Tada su kiekvienu nenuliniu polinomu $g \in K[x]$ turime $g(u) = \phi_u(g) \neq 0$ ir todėl $g(u)$ turi turėti atvirkštinį elelmentą kūne $K(u)$: t.y. su visais $f, g \in K[x]$, kai $g \neq 0$ turime $f(u)/g(u) \in K(u)$. Dabar mes galime apibrėžti homomorfizmą $\bar{\phi}_u : K(x) \to K(u)$, $\bar{\phi}_u(f/g) = f(u)/g(u)$ su visais $f/g \in K(x)$. $\bar{\phi}_u$ yra netrivialusis homomorfizmas, todėl jis yra monomorfizmas. Kadangi Im $\bar{\phi}_u$ yra kūno $K(u)$ pokūnis, kuriame yra ir u , ir K, tai Im $\bar{\phi}_u$ turi sutapti su $K(u)$. Taigi $\bar{\phi}_u$ yra izomorfizmas.

(2) Tegu u yra algebrinis virš K. Tada $\ker(\phi_u) = \langle p \rangle$ su nenuliniu $p \in K[x]$. Mes parodysime, kad p turi būti neredukuojamas ir tuo pačiu $\langle p \rangle$ yra maksimalusis idealas polinomų žiede $K[x]$. Jeigu priešingai, $fg = p$ su $f, g \in K[x]$ ir $\deg f$ ir $\deg g$ yra griežtai mažesni už $\deg p$, tai $f(u)g(u) = p(u) = 0$. Bet F yra kūnas ir todėl arba $f(u) = 0$, arba $g(u) = 0$, t.y. arba $f \in \ker(\phi_u)$, arba $g \in \ker(\phi_u)$. Taigi, arba $f = pq$, arba $g = pq$ su $q \in K[x]$. Bet tai prieštarauja nelygybėms tarp polinomų p, f ir g laipsnių ir tai rodo, kad polinomas turi būti neredukuojamas.

Kadangi p yra neredukuojamas, tai $\mathrm{Im}(\phi_u) \cong K[x] / \langle p \rangle$ yra kūnas, kuriame yra ir kūnas K ir elementas u. Mes turime $\mathrm{Im}(\phi_u) \subseteq K(u) \subseteq \mathrm{Im}(\phi_u)$, todėl $K(u) \cong K[x] / \langle p \rangle$.

Dabar parodysime, kad aibė $U = \{1, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$ yra $K(u)$ bazė virš K, čia $n = \deg(p)$. Su kiekvienu $w \in K(u)$ egzistuoja toks $f \in K[x]$, kad $\phi_u(f) = w$. Iš Dalybos su liekana teoremos turime, kad $f = pq + r$, su $q, r \in K[x]$ ir $r = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, čia $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in K$. Kadangi $pq \in \ker(\phi_u)$, tai turime, kad $w = \phi_u(f) = a_0 1 + a_1 u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$. O tai rodo, kad U yra generuojanti $K(u)$ sistema. Maža to, jeigu $a_0 1 + a_1 u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1} = 0$, čia $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in K$, tai $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in \ker(\phi_u)$. Kadangi paskutinio polinomo laipsnis mažesnis už polinomo p laipsnį, tai būtinai $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = 0$ (

mažiausio laipsnio nenulinis polinomas, esantis ideale $\ker(\phi_u)$ yra p). Gavome, kad $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ ir todėl U yra tiesiškai nepriklausoma ir tuo pačiu $K(u)$ bazė.

Įrodyta.

Jeigu F/K yra kūno plėtinys ir $u \in F$ yra algebrinis virš K, tai **minimaliuoju elemento** u **polinomu** vadiname tokį vienintėlį normuotą neredukuojamą polinomą $p \in K[x]$, kad $p(u) = 0$. Aišku, kad elemento u minimalusis polinomas yra vienintėlis normuotas idealo $\ker(\phi_u)$ generatorius. **Elemento** u **laipsniu virš** K vadinsime jo minimalaus polinomo p laipsnį.

Svarbi paskutinės teoremos išvada yra ta, kad, jeigu $u \in F/K$ yra n- ojo laipsnio algebrinis elementas virš kūno K, tai kiekvieną elementą $c \in K(u)$ vienintėliu būdu galima reikšti elementų $1, u, u^2, ..., u^{n-1}$ tiesine kombinacija

$$c = a_0 1 + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1},$$

čia $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in K$.

Pavyzdys. Nagrinėkime $F = \mathbf{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$. Kadangi $x^3 - 2$ yra neredukuojamas virš $\mathbf{Q}$, tai pagal Teoremą 1.5 aibė $\left\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$ yra F bazė virš $\mathbf{Q}$. Tada kiekvienas elementas $v \in F$ vienintėliu būdu gali būti užrašytas aibės $\left\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$ elementų tiesine kombinacija : $v = a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2\sqrt[3]{4}$, čia $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Q}$.

Dabar mes palyginsime įvairius kūno K plėtinius. Visų pirma, mes pasinaudosime įverčio homomorfizmu paprastiems algebriniams plėtiniams klasifikuoti izomorfizmo atžvilgiu.

Teorema 1.6 *Tegu E/K ir F/K yra du kūno plėtiniai, o $u \in E$ ir $v \in F$ yra algebriniai elementai virš K. Šie elementai u ir v yra šaknimis vieno ir to pačio neredukuojamo polinomo $p \in K[x]$ tada ir tik tada, kada egzistuoja toks kūnų izomorfizmas $\psi : K(u) \to K(v)$, kad $\psi(u) = v$ ir $\psi(a) = a$ su visais $a \in K$.*

Įrodymas. Tegu u ir v yra neredukuojamo $p \in K[x]$ šaknys. Tada pagal Teoremą 1.5 ϕ_u ir ϕ_v indukuoja izomorfizmus $\bar{\phi}_u : K[x]/\langle p\rangle \to K(u)$ ir $\bar{\phi}_v : K[x]/\langle p\rangle \to K(v)$, kurie tenkina lygybes $\bar{\phi}_u(x) = u$, $\bar{\phi}_u(a) = a$ ir $\bar{\phi}_v(x) = v$, $\bar{\phi}_u(a) = a$ su visais $a \in K$. Taigi $\psi = \bar{\phi}_v\bar{\phi}_u^{-1}$ yra ieškomasis homomorfizmas.

Priešingai, tegu egzistuoja izomorfizmas $\psi : K(u) \to K(v)$. Tada $\psi\phi_u = \phi_v$ ir $\ker(\phi_u) = \ker(\phi_v) \subseteq K[x]$. Bet $K[x]$ − pagrindinių idealų sritis, todėl $\ker(\phi_u) = \langle p \rangle$, čia $p-$ neredukuojamas virš K polinomas , bei u ir v yra šio polinomo šaknys.

Įrodyta.

Pagrindinė Teoremos 1.6 išvada yra ta, kad paprastasis algebrinis plėtinys $K(u)$ yra apibrėžtas vienareikšmiškai izomorfizmo tikslumu. Apie šį plėtinį dar sako, kad jis gaunamas **prijungiant** prie kūno K neredukuojamo polinomo $p \in K[x]$ **šaknį**. Nereikia galvoti, kad ,prijungus vieną neredukuojamo polinomo šaknį, prijungsim ir likusias, t.y. paparastieji plėtiniai $K(u)$ ir $K(v)$ iš Teoremos1.6 ne visada sutampa. Pavyzdžiu galėtų būti neredukuojamas virš $\mathbf{Q}$ polinomas $x^4 - 2$. Aišku, kad plėtinyje $\mathbf{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right)/\mathbf{Q}$, čia $\sqrt[4]{2}-$ aritmetinė ketvirto laipsnio šaknis iš 2, nėra kompleksinių polinomo x^4-2 šaknų $\pm i\sqrt[4]{2}$, t.y. $\mathbf{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right) \neq \mathbf{Q}\left(i\sqrt[4]{2}\right)$, nors šie kūnai ir yra izomorfiški.

Dabar mes įrodysime teoremą, kuri nesunkiai leidžia mums nustatyti plėtinio algebriškumą.

Teorema 1.7 *Jeigu F yra baigtinio laipsnio kūno K plėtinys, tai F yra algebrinis kūno K plėtinys, generuojamas baigtine aibe virš K.*

Įrodymas. Tegu $[F : K] = n$. Tada su kiekvienu $u \in F$ aibė $\{1, u, u^2, ..., u^n\}$, turinti $n + 1$ elementą, yra tiesiškai priklausoma, t.y. egzistuoja tokie ne visi lygūs nuliui $a_0, a_1, ..., a_n \in K$, kad

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0,$$

o tai rodo, kad u yra algebrinis virš K. Tai teisinga su kiekvienu $u \in F$ ir todėl F yra algebrinis virš K. Toliau, jeigu $\{v_1, ..., v_n\}$ yra F bazė virš K, tai $F = K(v_1, ..., v_n)$, o tai ir rodo, kad F yra generuojamas baigtine aibe virš K.

Įrodyta.

Atvirkštinis Teoremai 1.7 teiginys nėra teisingas. Pavyzdžiu galėtų būti visų algebrinių virš $\mathbf{Q}$ kompleksinių skaičių aibė $\bar{\mathbf{Q}}$. Ši aibė yra kūnas, nes jeigu $\alpha, \beta \in \bar{\mathbf{Q}}$, tai $\alpha + \beta, \alpha\beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ priklauso $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$. Pagal Teoremą 1.7 kūnas $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ yra albebrinis kūno $\mathbf{Q}$ plėtinys, todėl visi nagrinėjamieji elementai priklauso $\bar{\mathbf{Q}}$. Kūną $\bar{\mathbf{Q}}$ vadina **algebrinių skaičių kūnu.** Turime, kad su kiekvienu natūraliuoju pirminiu skaičiumi p ir primityviąja $p-$ ojo laipsnio šaknimi iš vieneto

ς teisinga tai, kad $\mathbf{Q}(\varsigma) \subset \bar{\mathbf{Q}}$ ir $[\mathbf{Q}(\varsigma) : \mathbf{Q}] = p - 1$. Taigi, plėtinio laipsnis $\left[\bar{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}\right] = \infty$.

Toliau, jeigu F/K yra kūno plėtinys ir E yra kūno F pokūnis, kuriame yra kūnas K, $K \subseteq E \subseteq F$, tai kūnas E vadinamas **tarpiniu kūnu**.

Teorema 1.8 *Tegu F/K yra kūno plėtinys, o E yra tarpinis kūnas. Tada $[F : K] = [F : E] [E : K]$ ir $[F : K]$ yra baigtinis tada ir tik tada, kada ir $[F : E]$, ir $[E : K]$ yra baigtiniai.*

Įrodymas. Tegu B yra E bazė virš K, o B' yra F bazė virš E. Dabar pakanka parodyti, kad $BB' = \{xy | x \in B, y \in B'\}$ yra F bazė virš K ir $|BB'| = |B| \cdot |B'|$.

Parodysime, kad BB' generuoja F. Tegu $z \in F$. Tada egzistuoja tokie $y_1, ..., y_n \in B'$ ir $a_1, ..., a_n \in E$, kad $z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i$. Bet su kiekvienu $a_i \in E$ egzistuoja tokie $x_{i,1}, ... x_{i,r_i} \in B$ ir $c_{i,1}, ..., c_{i,r_i} \in K$, kad $a_i = \sum\limits_{j=1}^{r_i} c_{i,j} x_{i,j}$. Iš čia turime

$$z = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} c_{i,j} \left(x_{i,j} y_i \right) \right)$$

ir todėl BB' generuoja F.

Parodysime, kad BB' yra tiesiškai nepriklausoma virš K. Tegu $x_1, ..., x_m \in B$, $y_1, ..., y_n \in B'$ ir $c_{1,1}, c_{1,2}, ..., c_{m,n} \in K$ yra tokie, kad $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} c_{i,j} x_i y_j = 0$. Aibė B' yra tiesiškai nepriklausoma, todėl su kiekvienu i turime $\sum\limits_{j=1}^{m} c_{i,j} x_j = 0$. Aibė B irgi yra tiesiškai nepriklausoma, todėl $c_{i,j} = 0$ su visais i, j. Taigi, aibė BB' yra tiesiškai nepriklausoma ir todėl F bazė virš K.

Įrodyta.

Iš Teoremos 1.5 turime: jeigu $u \in F$ yra algebrinis elementas virš K, o E yra tarpinis kūnas, tai

$$[E(u) : E] \leq [K(u) : K].$$

Iš tikrųjų, jeigu $[K(u) : K] = n$, tai elemento u minimalusis polinomas $p \in K[x]$ yra taip pat ir polinomas iš $E[x]$. Taigi, elementas u yra n-ojo laipsnio polinomo virš kūno E šaknis, todėl u minimalaus polinomo virš E laipsnis yra ne didesnis už n. Ši pastaba padės mums įrodyti

Teorema 1.9 *Tegu F/K yra kūno plėtinys, o E yra visų kūno F algebrinių elementų virš K aibė. Tada E yra kūno pokūnis, algebrinis virš K.*

Įrodymas. Tegu $u, v \in E$ yra nenuliniai. Tada

$[K(u,v) : K] = [K(u,v) : K(u)]\,[K(u) : K] \leq [K(v) : K]\,[K(u) : K] < \infty$. Pagal Teoremą 1.7 turime, kad $K(u,v)$ yra algebrinis virš K. Taigi $K(u,v) \subseteq E$ ir ,kadangi $u - v, uv \in K(u,v) \subseteq E$, turime, kad E yra požiedis kūne F. Turime taip pat ir tai, kad su kiekvienu nenuliniu $u \in E$ elementas $u^{-1} \in K(u) \subseteq E$ ir todėl E yra kūno F pokūnis ir pagal apibrėžimą algebrinis virš K.

Įrodyta.

Teorema 1.10 *Tegu F/K yra kūno plėtinys, o E yra toks tarpinis kūnas, kad F yra algebrinis virš E, o E yra algebrinis virš K. Tada F yra algebrinis virš K.*

Įrodymas. Tegu $u \in F$. Elementas u yra algebrinis virš E, todėl egzistuoja toks $n \in \mathbf{N}$ ir tokie $b_0, ..., b_n \in E$, kad $b_n u^n + \cdots + b_1 u_1 + b_0 = 0$. Kūnas E yra algebrinis virš K, todėl b_j su visiais j yra algebrinis virš K ir tuo pačiu virš bet kurio tarpinio tarp E ir K kūno. Taigi, kūnų sekoje

$$K \subseteq K(b_0) \subseteq K(b_0, b_1) \subseteq \ldots \subseteq K(b_0, ..., b_n) \subseteq K(b_0, ..., b_n, u)$$

esantys kūnai pagal Teoremą 1.5 yra iš kairės esančių paprastieji algebriniai plėtiniai, nes kiekvieno iš šių plėtinių laipsnis yra baigtinis. Tada pagal Teoremą 1.8 turime

$$[K(b_0, ..., b_n, u) : K] = [K(b_0, ..., b_n, u) : K(b_0, ..., b_n,)] \cdots [K(b_0) : K] < \infty.$$

Pagal Teoremą 1.7 $K(b_0, ..., b_n, u)$ yra algebrinis virš K, tuo pačiu ir u turi būti algebriniu virš K.

Įrodyta.

Iš įrodytos Teoremos 1.10 turime svarbią visų algebrinių virš $\mathbf{Q}$ skaičių kūno $\bar{\mathbf{Q}}$ savybę, kuri sugretina jį su kompleksinių skaičių kūnu. Tikrai, bet kuris nenulinio laipsnio polinomas $f(x) \in \bar{\mathbf{Q}}[x]$ turi šaknį kūne $\bar{\mathbf{Q}}$. Norėdami tai parodyti, nagrinėkime kūnų grandinę: $\mathbf{Q} \subset \bar{\mathbf{Q}} \subseteq \bar{\mathbf{Q}}(\alpha)$, čia $\alpha-$ kompleksinė polinomo $f(x)$

šaknis. Paprastasis plėtinys $\bar{\mathbf{Q}}(\alpha)/\bar{\mathbf{Q}}$ yra algebrinis ir pagal Teoremą 1.10 plėtinys $\bar{\mathbf{Q}}(\alpha)/\mathbf{Q}$ irgi yra algebrinis, tuo pačiu ir elementas α yra algebrinis virš $\mathbf{Q}$, t.y. $\bar{\mathbf{Q}}(\alpha) = \bar{\mathbf{Q}}$ ir $\alpha \in \bar{\mathbf{Q}}$.

Algebrinis kūno K plėtinys $\bar{K}$ vadinamas **algebriškai uždaru** kūnu virš K, jeigu bet kuris nenulinio laipsnio polinomas $f(x) \in K[x]$ turi šaknį kūne $\bar{K}$.

$\bar{\mathbf{Q}}$ yra algebriškai uždaras virš $\mathbf{Q}$, bet $\mathbf{C}$ nėra algebriškai uždaras kūnas virš $\mathbf{Q}$(jis nėra algebriškai uždaras net virš $\bar{\mathbf{Q}}$): $\mathbf{C}$ yra algebriškai uždaras virš $\mathbf{R}$.

Svarbi savybė: virš bet kurio kūno K egzistuoja algebriškai uždaras kūnas ir jis yra vienintėlis plėtinių izomorfizmo tikslumu, t.y. jeigu K' ir K'' yra algebriškai uždari virš K, tai egzistuoja toks kūnų izomorfizmas $\psi : K' \to K''$, kad $\psi(a) = a$ su visais $a \in K$.