Algebra ir geometrija informatikams. Pratybos. Rimantas Grigutis

9 pratybos. *Kompleksinės vieneto šaknys. Grupės ir jų pagrindinės savybės.*

Tegu $U(n)$ - n-ojo laipsnio vieneto šaknų aibė.

n-ojo laipsnio vieneto šaknies ε_k eile vadinamas mažiausias toks natūralus skaičius m, kad $(\varepsilon_k)^m = 1$.

n-ojo laipsnio vieneto šaknis ε_k vadinama primityvia, jeigu jos eilė lygi n.

Tegu $\alpha = a+ib = [r,\varphi] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbf{C}$. Tada $e^{a+ib} \overset{\text{def}}{=} e^a(\cos b + i\sin b)$; $z = r \cdot e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$; $\ln(a+ib) \overset{\text{def}}{=} \ln r + i\varphi$ ir $\alpha^\beta \overset{\text{def}}{=} \left(e^{\ln\alpha}\right)^\beta = e^{\beta\ln\alpha}$, čia $\beta \in \mathbf{C}$.

1. Raskite visas $n-$ ojo laipsnio šaknis iš 1, kai $1 < n \leq 25$.
2. Raskite visas primityvias $n-$ ojo laipsnio šaknis iš 1, kai $1 < n \leq 25$.
3. Raskite visų $n-$ ojo laipsnio šaknų iš 1 eiles, kai $1 < n \leq 25$.
4. Tegu $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ - vieneto šaknis. Įrodykite, kad ε_k eilė yra lygi $\dfrac{n}{BDD(k,n)}$.
5. Įrodykite, kad $U(m) \subset U(n)$, kai $m|n$.
6. Įrodykite, kad $U(m) \cap U(n) = \varepsilon_0$, kai $\mathrm{BDD}(m,n) = 1$.
7. Faktorizuokite polinomus $x^n - 1$ ir $x^n + 1$ virš $\mathbf{R}$, kai $n = 3, ..., 25$.
8. Įrodykite, kad $1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{n-1} = 0$, kai $\beta \neq 1$ - vieneto šaknis.

9. Suskaičiuokite: 1) $e^{\pi i}$; 2) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$; 3) $\ln(-1)$; 4) $\ln(1+i)$.
10. Parodykite, kad lygties $z^n = 1$ šaknimis yra skaičiai $\zeta_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}, k \in \mathbf{Z}$.

Grupės ir jų pagrindinės savybės.

Įrodykite, kad šios aibės yra grupės nurodytų operacijų atžvilgiu:

11. $K = \left(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | d = a, c = -2b, ad - bc \neq 0\right\}, \cdot\right) \subset GL_2(,\mathbf{R})$.
12. $G = \left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbf{R}\right\}, \cdot\right) \subset GL_3(\mathbf{R})$.
13. $(\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, \circ) \subset S_4-$ Kleino ketvirtinė grupė.
14. $(\{id, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}, \circ) \subset S_4$.

Grupės $(G, *)$ elemento g eilė yra toks mažiausias sveikas teigiamas skaičius n, kad $\underbrace{g * ... * g}_{n \text{ kartų}} = 1$.

Raskite grupės elemento eilę:

15. $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ eilė grupėje $GL_3(\mathbf{C})$.

16. $g = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ eilė grupėje $\mathbf{C}^* = (\mathbf{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

15. $h = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ eilė grupėje $\mathbf{C}^* = (\mathbf{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

17. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eilė grupėje $GL_4(\mathbf{R})$.

18. $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eilė grupėje $GL_2(\mathbf{C})$.

19. $D = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eilė grupėje $GL_2(\mathbf{C})$.

Tegu G grupė ir $g \in G$. Aibę $\left\{g^k | k \in \mathbf{Z}\right\}$ žymėsime $\langle g \rangle$. Įrodykite, kad grupės yra izomorfinės:

20. $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbf{C}^*$ ir $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{C})$. $\langle z \rangle \approx \langle A \rangle$.

21. $\sigma = (32651) \in S_6$ ir $z = \cos\frac{6\pi}{5} + i \sin\frac{6\pi}{5} \in \mathbf{C}^*$.Įrodykite, kad $\langle \sigma \rangle \approx \langle z \rangle$.

22. $z = 2 - i \in \mathbf{C}^*$, $n = 3 \in \mathbf{Z}$, $a = 10 \in \mathbf{R}^*$. Įrodykite, kad $\langle z \rangle \approx \langle n \rangle \approx \langle a \rangle$.