

7 pratybos. *Matricos.*

1. Duotos matricos $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Jeigu įmanoma apskaičiuokite $A_i \pm A_j$ ir $A_i \cdot A_j, A_j^{-1}, 1 \leq i, j \leq n$.

2. Tegū $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$. Įrodykite, kad $A^n = \begin{pmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}$, kai $n \geq 1$.

3. Tegū $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Įrodykite, kad $A^n = \frac{3^n-1}{2}A + \frac{3-3^n}{2}I_2$, kai $n \geq 1$.

4. Raskite A^{-1} , kai

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Su kuria racionali λ reikšme matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ yra išsigimusi?

6. Išspręskite: $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Raskite: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, 2) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n$.

8. Kvadratinė matrica $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & b \\ 0 & 0 & \cdots & c \\ \vdots & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n$. Įrodykite, kad $A^n = 0$.

10. Tegu tiesinių lygčių sistema $AX = B$ yra *nesuderinta*. Tiesinių lygčių sistema $A^TAX = A^TB$ vadinama *normaliąja sistema* atitinkančia $AX = B$. Normaliosios sistemos sprendiniai vadinami sistemos $AX = B$ *mažiausių kvadratų sprendiniais*.

10.1. Raskite sistemos mažiausių kvadratų sprendinius.

$$1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x + y = 3.05 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 5 \\ 3x + 5y = 12 \end{cases} .$$

10.2. Duoti taškai (x_i, y_i) turėtų būti tiesėje $y = mx + b$. Raskite mažiausių kvadratų tiesę šiems taškams:

$$1) (1, 2); (2, 6); (3, 5) \quad 2) (0, 0); (1, 0); (2, -1); (3, 4); (4, 8) .$$

10.3. Duoti taškai (x_i, y_i) turėtų būti parabolėje $y = ax^2 + bx + c$. Raskite mažiausių kvadratų parabolę šiems taškams:

$$1) (0, 0); (1, 0); (2, -1); (3, 4); (4, 8) \quad 2) (-1, 3); (0, 1); (1, 0); (2, -4) .$$