5 Pratybos. *Keitiniai.*

Apibrėžimas 1. *Keitinio* $\pi \in S_n$ ***eile*** *vadinamas toks mažiausias sveikas skaičius* $k \geq 1$, *kad* $\pi^k = id_{S_n}$.

Apibrėžimas 2. *Skaičius* $d(\pi)$, *apibrėžiamas formule* $d(\pi) = s - k$, *čia* s - *keičiami keitinyje* π *skaičiai,* k - *nepriklausomų ciklų skaičius, vadinamas keitinio* π **dekrementu**.

1. Keitinį $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 9 & 2 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ parašykite nesikertančiais ciklais. Kokia keitinio σ eilė ? Lyginis ar nelyginis šis keitinys ? Raskite σ^{-1} .

2. Tegu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$,
$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Pararašykite keitinius $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

3. Tegu $\alpha = (1,3,5,7,9)\,, \beta = (1,2,6)\,, \gamma = (1,2,5,3) \in S_{10}$. Parašykite keitinį $\sigma = \alpha\beta\gamma$ nesikertančių ciklų sandauga. Raskite σ ir σ^{-1} eiles. Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

4. Tegu $\sigma = (2,4,9,7)\,(6,4,2,5,9)\,(1,6)\,(3,7,6) \in S_9$. Parašykite keitinį σ nesikertančių ciklų sandauga. Raskite σ ir σ^{-1} eiles. Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

5. Tegu $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 2 & 11 & 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, o $\sigma = (3,8,7) \in S_{11}$. Pararašykite keitinius $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai ?

6. Įrodykite, kad $ord_{S_n}(\sigma) = ord_{S_n}(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1})$ su visais $\sigma, \tau \in S_n$.

7. Įrodykite, kad grupėje S_{10} yra 10, 12, 14 eilės keitiniai , bet nėra 11 ir 13 eilių keitinių .

8. Keitinio π dekrementas $d(\pi) = d$.

1) Įrodykite, kad sign$\pi = (-1)^d$.

2) Įrodykite, kad keitinį π galima reikšti d transpozicijų sandauga.

3) Įrodykite, kad keitinį π negalima reikšti mažiau kaip d transpozicijų sandauga.

9. Įrodykite, kad bet kurį S_n keitinį galima reikšti transpozicijų $(1,2), (1,3), ..., (1,n)$ sandauga.

10. Įrodykite, kad bet kurį S_n keitinį galima reikšti transpozicijų $(1,2), (2,3), ..., (n-1,n)$ sandauga.

11. Įrodykite, kad bet kurį A_n keitinį galima reikšti keitinių $\{(i,j,k) \mid 1 \le i,j,k \le n\}$ sandauga.

12. Kiek grupėje S_{100} ciklų, kurių ilgis 100 ?

13. Įrodykite, kad keitinio $\pi = (1, 2, ..., 100) \in S_{100}$ 12-asis laipsnis π^{12} yra *keturių* 25 -ių ilgio ciklų sandauga.

14. Kiek yra 2 -osios eilės keitinių iš S_{10}? Keliuose iš jų yra lygiai 6 inversijos?

Žaidimas "15". Kiekvienai "15" lentos pozicijai

i_1	i_2	i_3	i_4
i_5	i_6	i_7	i_8
i_9	i_{10}	i_{11}	i_{12}
i_{13}	i_{14}	i_{15}	i_{16}

,

čia visi $i_1, ...i_{16}$ skirtingi iš $\{1, ..., 15, 16\}$ (skaičiumi 16 pažymėtas langelis yra tuščias), priskirsime keitinį

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15} & i_{16} \end{pmatrix}.$$

Tuo atveju, kai $i_{16} = 16$, sakysime, kad lentelė *standartinė*. Standartinę lentelę galima sutapatinti ir su keitiniu iš S_{15} :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 15 & 16 \\ i_1 & \cdots & i_{15} & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 15 \\ i_1 & \cdots & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Kiekvienam *galimam* ėjimui

$$\underset{\pi}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & 16 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \mathbf{16} & \cdots & a_j & \cdots & a_{16} \end{pmatrix}}} \rightsquigarrow \underset{\pi_1}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & 16 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & \mathbf{16} & \cdots & a_{16} \end{pmatrix}}}$$

priskirsime lygybę

$$\pi = \pi_1 \circ (a_j, 16).$$

Norint laimėti šį žaidimą, reikia per baigtinį ėjimų skaičių iš pozicijos

i_1	i_2	i_3	i_4
i_5	i_6	i_7	i_8
i_9	i_{10}	i_{11}	i_{12}
i_{13}	i_{14}	i_{15}	i_{16}

pereiti prie *pradinės* lentelės

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

, t.y. reikia rasti tokius $n_1, ..., n_s$, kad

$$\pi \circ (n_1, 16) \circ \cdots \circ (n_s, 16) = \mathrm{id}_{S_{16}}.$$

Uždaviniai.

15.1. Įrodykite, jeigu *standartinė* lentelė laiminga, tai ją atitinkantis keitinys yra lyginis..

Patarimas. Žiūrėkite į žaidimo lentą kaip į matricą ir kiekvienam ten esančiam skaičiui priskirkite jo koordinates $\{i, j\}$, $1 \leq i, j \leq 4$. Stebėkite kaip kis tuščio langelio (skaičius 16) koordinčių suma $i+j$ atlikus ėjimą. Ir pagaliau, įsitikinkite, kad norint pereiti nuo *standartinės* lentos prie *pirminės* reiks lyginio ėjimų skaičiaus.

15.2. Įrodykite, kad iš keitinius $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, ..., $(1,2,15)$ atitinkančių pozicijų galima laimėti žaidimą.

Patarimas. Parodykite, kad galima tokia ėjimų seka:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & 16 \\ 2 & k & \cdots & 1 & \cdots & \mathbf{16} \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & j & \cdots & 16 \\ 2 & k & 1 & \cdots & 16 & \cdots & a_{16} \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 7 & \cdots & 16 \\ 2 & k & 1 & \cdots & 16 & \cdots & b_{16} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 7 & \cdots & 16 \\ 2 & 16 & k & \cdots & 1 & \cdots & c_{16} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 7 & \cdots & 16 \\ 1 & 2 & k & \cdots & 16 & \cdots & a_{16} \end{pmatrix}.$$

(1) : pasinaudokite *judėjimu* grandine:

		$\rightarrow$	$\downarrow$
$\rightarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$

(tai įmanoma, nes lenta standartinė, t.y. tuščias langelis 16 yra grandinėje).

Šis judėjimas: 1) nekeičia 1 ir 2 pozicijose esančių reikšmių; 2) bet kurią grandinėje esančią reikšmę galima cikliškai pastumti į bet kurią kitą grandinės vietą.

15.3. Įrodykite, jeigu π_1 ir π_2 yra keitiniai atitinka išlošiamas pozicijas, tai ir $\pi_1 \circ \pi_2$ yra keitinys atitinka išlošiamą poziciją.

Patarimas. Pakanka nagrinėti standartines pozicijas.

15.4. Įrodykite, kad bet kurį lyginį keitinį iš S_{15} galima reikšti ciklų $(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), ..., (1,2,15)$ sandauga.

Patarimas. Parašykite lyginį keitinį π transpozicijų sandauga

$$\pi = \delta_1\delta_2 \cdots \delta_{2k-1}\delta_{2k} =$$
$$(\delta_1\sigma\sigma\delta_2)(\delta_3\sigma\sigma\delta_4)\cdots(\delta_{2k-1}\sigma\sigma\delta_{2k}) =$$
$$(\delta_1\sigma)(\sigma\delta_2)(\delta_3\sigma)(\sigma\delta_4)\cdots(\delta_{2k-1}\sigma)(\sigma\delta_{2k})$$

ir pasinaudokite

1) $(1,2)\circ(1,2) = \mathrm{id}_{S_{15}}$;

2) $(1,2)\circ(i,j) = (1,2,j)\circ(1,2,i)\circ(1,2,i)\circ(1,2,j)$, jei $i,j > 2$;

3) $(1,2)\circ(1,j) = (2,j)\circ(1,2) = (1,2,j)$, jei $j > 2$;

4) $(1,2)\circ(2,j) = (1,j)\circ(1,2) = (1,2,j)$, jei $j > 2$.

15.5. Išreikškite ciklų $(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), ..., (1,2,15)$ sandauga šiuos keitinius:

1) $\pi_1 = (1,2,3)(7,5)(4,6,9,8)$;

2) $\pi_2 = (1,2,3,4)(8,7,5,6)$.

15.6. Ar galima laimėti "15" žaidimą iš šių pozicijų;

1)

8	7	6	5
1	2	4	3
13	15	11	10
14	12	9	

; 2)

6	3	4	5
2	1	15	10
13	12	11	14
9	8	7	

?

Jeigu galima, kaip laimėti?