

4 Pratybos. Determinantai.

1. Pasinaudoję determinantų savybėmis įrodykite:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

2. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{vmatrix} = -8.$$

3. Apskaičiuokite:

$$(a) \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = -2(a-b)^2(a+b).$$

5. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = 2a(b^2+c^2).$$

6. Su kuriomis racionaliomis a ir b reikšmėmis sistemos

$$\begin{cases} x - 2y + bz = 3 \\ ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

matricos determinantas $\neq 0$. Šio atveju išspręskite sistemą Cramerio formulėmis.

7. Išspręskite lygtis:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 2t+6 \\ 2 & 2 & 6-t & t \end{vmatrix} = 0. \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. Išspręskite sistemą Cramerio formulėmis:

$$(a) \begin{cases} -2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y - z = 4 \\ -2x - y + z = -3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 17 \\ 2x + y - 5z = -12 \\ 3x + 4y - z = -1 \end{cases}$$

9. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a & a \\ b & 1+b & b & b \\ c & c & 1+c & a \\ d & d & d & 1+d \end{vmatrix} = 1 + a + b + c + d.$$

10. Tegu taškai $P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4$ yra keturkampio viršūnės išdėstytos prieš laikrodžio rodyklę. Įrodykite, kad šio keturkampio plotas yra lygus:

$$\frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \right).$$

11. *FIBONACCI* skaičių apibrėžimas: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Įrodykite, kad n -osios eilės determinantas

$$f_{n+1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n \text{ stulpelių}} \Bigg\} n \text{ eilučių}$$

kai $n \geq 1$ apibrėžia Fibonacci skaičius.