**13 paskaita.** *Tiesinės transformacijos erdvėje.*

**Apibrėžmas.** *Funkcija $T$ iš $xyz-$ erdvės į $xyz-$ erdvę, $T(x,y,z)=(u,v,w)$, apibrėžta lygybėmis*

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \qquad (1)$$

*vadinama* **tiesine transformacija.**

Tiesinę transformaciją $T$ apibrėžiančias lygybes (1) galima reikšti ir matricomis

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

Taigi pati transformacija $T$ gali būti apibrėžiama ir trumpiau

$$T(\mathbf{a}) = A\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

čia $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ $-$ vektoriai, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $-$ tiesinės transformacijos $T$ matrica. Norėdami pabrėžti ryšį tarp transformacijos $T$ ir jos matricos $A$, pačią transformaciją žymi $T_A$, o transformacijos $T$ (arba $T_A$ ) matricą žymi $[T]$ (arba $[T_A]$ ):

$$T(\mathbf{a}) = [T]\,\mathbf{a}$$
$$[T_A] = A.$$

**Pavyzdžiai.** 1) Transformacija $T_0$, apibrėžta lygybe

$$T_0(\mathbf{a}) = 0\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

čia $\mathbf{0}-$ nulinė matrica, vadinama **nuline transformacija**. Šią transformaciją dažnai žymi 0.

2) Transformacija $T_I$, apibrėžta lygybe

$$T_I(\mathbf{a}) = I\mathbf{a} = \mathbf{a},$$

čia $I-$ vienetinė matrica, vadinama **vienetine transformacija**. Šią transformaciją dažnai žymi $I$.

**Svarbi pastaba.** Visiškai analogiškai galima apibrėžti ir tiesines transformacija ir $xy-$ plokštumoje: $T_A(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = [T_A]\,\mathbf{a}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aptarsime svarbiausias tiesines transformacijas $xy-$ plokštumoje ir $xyz-$ erdvėje.

1. *Atspindžio transformacija.*

**Apibrėžimas**. *Atspindžio transformacija yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti vektorių simetrišką kurios nors tiesės arba plokštumos atžvilgiu.*

1.1. *Atspindžio transformacija $xy-$ plokštumoje.*

| $\underline{Transformacija}$ | $\underline{Lygtys}$ | $\underline{Matrica}$ | $\underline{Formulė}$ |
|---|---|---|---|
| Atspindys $y$- ašies atžvilgiu | $u = -x$<br>$v = y$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ |
| Atspindys $x$- ašies atžvilgiu | $u = x$<br>$v = -y$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ |
| Atspindys $y = x$ atžvilgiu | $u = y$<br>$v = x$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ |

1.1. *Atspindžio transformacija xyz− erdvėje.*

| *Transformacija* | *Lygtys* | *Matrica* | *Formulė* |
|---|---|---|---|
| Atspindys $xy$- plokštumos atžvilgiu | $u = x$<br>$v = y$<br>$w = -z$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ |
| Atspindys $xz$- plokštumos atžvilgiu | $u = x$<br>$v = -y$<br>$w = z$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ |
| Atspindys $yz$- plokštumos atžvilgiu | $u = -x$<br>$v = y$<br>$w = z$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ |

2. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija.*

**Apibrėžimas**. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti to vektoriaus ortogonaliąją projekciją kurioje nors tiesėje arba plokštumoje, einančiose per koordinačių pradžią.*

2.1. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija xy− plokštumoje.*

| *Transformacija* | *Lygtys* | *Matrica* | *Formulė* |
|---|---|---|---|
| Projekcija į $x$- ašį | $u = x$<br>$v = 0$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ |
| Projekcija į $y$- ašį | $u = 0$<br>$v = y$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ |

2.2. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija $xyz-$ erdvėje.*

| $\underline{Transformacija}$ | $\underline{Lygtys}$ | $\underline{Matrica}$ | $\underline{Formulė}$ |
|---|---|---|---|
| Projekcija į $xy$- plokštumą | $u=x$<br>$v=y$<br>$w=0$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ |
| Projekcija į $xz$- plokštumą | $u=x$<br>$v=0$<br>$w=z$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ |
| Projekcija į $yz$- plokštumą | $u=0$<br>$v=y$<br>$w=z$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ |

3. *Posūkis.*

**Apibrėžimas**. *Posūkiu kampu $\theta$ $xy$ - pokštumoje vadiname tiesinę transformaciją $T^{\theta}$, kuri kiekvieną vektorių $xy$ - plokštumoje pasuka prieš laikrodžio rodyklę kampu $\theta$.*

Rasime posūkio transformacijos $T^{\theta}$ matricą.
Tegu $T^{\theta}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ . Turime

$$\mathbf{a} = (x, y) = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j},$$
$$\mathbf{b} = (u, v) = r\cos(\theta+\varphi)\,\mathbf{i} + r\sin(\theta+\varphi)\,\mathbf{j}$$

ir

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$
$$u = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$v = r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Tada

$$\left[T^{\theta}\right] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Apibrėžimas.** *Tegu $l-$ tiesė $xyz$ - erdvėje, einanti per koordinačių pradžią, ir* **u** *vektorius tiesėje $l$ ir pradžia taške* $(0,0,0)$. **Teigiama tiesės posūkio vektoriaus u kryptimi** *vadinsime kryptį, gaunamą sukant dešinę ranką, nykščiu nukreiptą vektoriaus* **u** *kryptimi, sulenktų pirštų link (dešinės rankos taisyklė). Posūkiu kampu $\theta$ $xyz$ - erdvėje vadiname tiesinę transformaciją $T^{\theta}$, kuri kiekvieną vektorių $xyz$ - plokštumoje pasuka teigiama duotos tiesės posūkio kryptimi kampu $\theta$.*

| $\underline{Transformacija}$ | $\underline{Lygtys}$ | $\underline{Matrica}$ |
|---|---|---|
| Posūkis apie $x$- ašį kampu $\theta$ | $u = x$<br>$v = y\cos\theta - z\sin\theta$<br>$w = y\sin\theta + z\cos\theta$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ |
| Posūkis apie $y$- ašį kampu $\theta$ | $u = x\cos\theta + z\sin\theta$<br>$v = 1$<br>$w = -x\sin\theta + z\cos\theta$ | $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ |
| Posūkis apie $z$- ašį kampu $\theta$ | $u = x\cos\theta - y\sin\theta$<br>$v = x\sin\theta + y\cos\theta$<br>$w = z$ | $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

**Pastaba**. Posūkis kampu $\theta$ *vienetinio* vektoriaus $\mathbf{u} = (a, b, c)$ kryptimi - tai transformacija, kurios matrica:

$$\begin{pmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}.$$

4. *Tiesinis ištempimas ir tiesinis suspaudimas.*

**Apibrėžimas**. *Tegu $k$ - neneigiamas skaičius. Tada transformacija $T(\mathbf{a}) = k\mathbf{a}$ vadinama ištempimu, jei $k \geq 1$ , ir suspaudimu, jei $0 \leq k \leq 1$.*

Aišku, kad tiek ištempimo, tiek suspaudimo matricos $xy$ - plokštumoje ir $xyz$ - erdvėje yra

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

atitinkamai.

*Tiesinių transformacijų kompozicija.*

**Apibrėžimas**. *Tegu $T_A$ ir $T_B$ - dvi transformacijos arba $xy$ plokštumoje, arba $xyz$ erdvėje. Tada transformaciją $T_B \circ T_A$ apibrėžtą formule*

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{a}) = T_B(T_A(\mathbf{a}))$$

*vadina tiesinių* **transformacijų** $T_A$ ir $T_B$ **kompozicija**(**sandauga**).

Transformacija $T_B \circ T_A$ - tiesinė, nes

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{a}) = T_B(T_A(\mathbf{a})) = B(A\mathbf{a}) = (BA)\mathbf{a}.$$

Taigi turime, kad

$$T_B \circ T_A = T_{BA}.$$

**Pavyzdys.** $T^{\theta_2} \circ T^{\theta_1} = T^{\theta_2+\theta_1}$.
Tikrai

$$\begin{aligned}
\left[T^{\theta_2} \circ T^{\theta_1}\right] &= \left[T^{\theta_2}\right] \cdot \left[T^{\theta_1}\right] = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \\
&= \left[T^{\theta_2+\theta_1}\right].
\end{aligned}$$

**Pastaba.** Tiesinių transformacijų kompozicijoje yra svarbi transformacijų atlikimo eilės tvarka. Bendrai transformacija $T_B \circ T_A$ ne visada yra lygi transformacijai $T_A \circ T_B$. Pavyzdžiui, tegu $T_A$ atspindžio transformacija $xy$ plokštumoje tiesės $y = x$ atžvilgiu, o $T_B$ - ortogonalioji projekcija į $x$ -ašį. Tada

$$\begin{aligned}
[T_B \circ T_A] = [T_B]\,[T_A] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[T_A \circ T_B] = [T_A]\,[T_B] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ir $T_B \circ T_A \neq T_A \circ T_B$.