

12 paskaita. *Tiesė erdvėje. Dviejų tiesių, tiesės ir plokštumos padėtis erdvėje.*

Tiesę erdvėje galima apibrėžti kaip dviejų sisikertančių plokštumų susikirtimo bendrų taškų aibę. Taigi, kiekvieną tiesę galima užrašyti dviejų tiesinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Tai **bendroji tiesės lygtis**.

Tegu $A_0(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow$ fiksuotas tiesės t taškas, o $A(x, y, z)$ - bet kuris tiesės t taškas, ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ - nenulinis vektorius lygiagretus tiesei t . Tada vektoriai $\mathbf{AA}_0 = (x \Leftrightarrow x_0, y \Leftrightarrow y_0, z \Leftrightarrow z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ yra kolinearūs. Todėl

$$\frac{x \Leftrightarrow x_0}{k} = \frac{y \Leftrightarrow y_0}{l} = \frac{z \Leftrightarrow z_0}{m}.$$

Šis tiesės pavidažas vadinamas **kanonine tiesės lygtimi**, o vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ vadinamas tiesės t **krypties vektoriumi**.

Vektorių $\mathbf{AA}_0 = (x \Leftrightarrow x_0, y \Leftrightarrow y_0, z \Leftrightarrow z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ kolinearumą galėtume užrašyti ir taip:

$$\mathbf{AA}_0 = t\mathbf{v}$$

arba

$$\begin{aligned} x \Leftrightarrow x_0 &= tk \\ y \Leftrightarrow y_0 &= tl \\ z \Leftrightarrow z_0 &= tm \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tk \\ y &= y_0 + tl \\ z &= z_0 + tm \end{aligned}$$

Tai parametrinės tiesės t lygtys.

Kaip iš bendrosios tiesės lygties rasti kanoninę tiesės lygtį?

Tegu (1) yra bendroji tiesės t lygtis. Tiesės t krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ tai bet kuris vektorius lygiagretus abiemis plokštumoms: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, t.y. vektorius \mathbf{v} yra statmenas abiemis plokštumų normalės vektoriams $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Taigi vektoriumi \mathbf{v} galėtų būti vektorius

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array} \right|, \Leftrightarrow \left| \begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| \right).$$

Norint rasti kurią nors vieną tiesės tašką A_0 , reikėtų paimti kurią nors sistemos (1) sprendinį (x_0, y_0, z_0) .

Tiesių padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu.

Tegu $\mathbf{v} = (k, l, m)$ - tiesės t krypties vektorius.

1. $k = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus yz plokštumai
2. $l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus xz plokštumai
3. $m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus xy plokštumai
4. $k = l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus Oz ašiai
5. $l = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus Ox ašiai
6. $k = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus Oy ašiai.

Teorema(dviejų tiesių padėtis erdvėje). Tegu duotos dvi tiesės:

$$t_1 : \frac{x \Leftrightarrow x_1}{k_1} = \frac{y \Leftrightarrow y_1}{l_1} = \frac{z \Leftrightarrow z_1}{m_1}$$
$$t_2 : \frac{x \Leftrightarrow x_2}{k_2} = \frac{y \Leftrightarrow y_2}{l_2} = \frac{z \Leftrightarrow z_2}{m_2}.$$

Tada

- 1) tiesės t_1 ir t_2 lygiagrečios $\Leftrightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$.
- 2) tiesės t_1 ir t_2 statmenos $\Leftrightarrow k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.
- 3) kampas φ tarp tiesių t_1 ir t_2 randamas iš lygties

$$\cos \varphi = \frac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}.$$

4) tiesės t_1 ir t_2 yra prasilenkiančios \iff

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 \leftrightarrow x_1 & y_2 \leftrightarrow y_1 & z_2 \leftrightarrow z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

5) tiesės t_1 ir t_2 priklauso vienai plokštumai \iff

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 \leftrightarrow x_1 & y_2 \leftrightarrow y_1 & z_2 \leftrightarrow z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Irodymas.

1)

$$\begin{aligned} & \text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ lygiagrečios} \\ \iff & \text{ krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ lygiagretūs} \\ \iff & \frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ statmenos} \\ \iff & \text{ krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ statmeni} \\ \iff & k_1 k_2 + l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \end{aligned}$$

3) kampas φ tarp tiesių t_1 ir t_2 tai kampas tarp krypties vektorių $\mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)$ ir $\mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2)$, todėl

$$\cos \varphi = \frac{k_1 k_2 + l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}.$$

4)

$$\begin{aligned} & \text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ yra prasilenkiančios} \\ \iff & \text{ vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1), \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir} \\ & \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = (x_2 \leftrightarrow x_1, y_2 \leftrightarrow y_1, z_2 \leftrightarrow z_1) \text{ nėra komplanarūs} \\ \iff & \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) \neq 0. \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
& \text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ priklauso vienai plokštumai} \\
& \iff \text{vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1), \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir} \\
& \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = (x_2 \iff x_1, y_2 \iff y_1, z_2 \iff z_1) \text{ komplanarūs} \\
& \iff \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) = 0.
\end{aligned}$$

Įrodyta.

Teorema(tiesės ir plokštumos padėtis erdvėje). Tegu duota tiesė t :

$$\frac{x \iff x_0}{k} = \frac{y \iff y_0}{l} = \frac{z \iff z_0}{m}$$

ir plokštuma P :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

- 1) tiesė t lygiagreti plokštumai $P \iff ak + bl + cm = 0$
- 2) tiesė t statmena plokštumai $P \iff \frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m}$.

Įrodymas. Tiesė t lygiagreti plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės t krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ statmenas plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n} = (a, b, c)$:

$$ak + bl + cm = 0$$

Tiesė t statmena plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės t krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ lygiagretus plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n} = (a, b, c)$:

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m}.$$

Įrodyta.

Dabar aptarsime atstumo problemą tiesei erdvėje.

Tegu $A(a_1, a_2, a_3)$ ir $B(b_1, b_2, b_3) \iff$ fiksuoti tiesės t taškai, $P(x, y, z) \iff$ bet kuris tiesės t taškas, ir $\mathbf{AB} = (b_1 \iff a_1, b_2 \iff a_2, b_3 \iff a_3)$ - nenulinis vektorius lygiagretus tiesei t . Tada vektoriai $\mathbf{AP} = \mathbf{OP} \iff \mathbf{OA}$ ir \mathbf{AB} yra kolinearūs:

$$\mathbf{OP} \iff \mathbf{OA} = t\mathbf{AB}.$$

Tada lygybė

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + t\mathbf{AB} \quad (\Leftrightarrow -\infty < t < +\infty)$$

vadinama **vektorine tiesės t lygtimi**.

Teorema (taško atstumas iki tiesės). Tegu C yra erdvės taškas ir $t \Leftrightarrow$ tiesė, einanti per du taškus A ir B . Tada egzistuoja lygiai vienas toks tiesės t taškas P , kad vektorius \mathbf{CP} yra statmenas vektoriui \mathbf{AB} ir

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + t\mathbf{AB}, \quad t = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB}\|^2},$$

ir taško C atstumas iki tiesės t lygus

$$CP = \frac{\sqrt{AC^2 \cdot AB^2 \Leftrightarrow (\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB})^2}}{AB}.$$

Įrodymas. Tegu $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + t\mathbf{AB}$ ir vektorius \mathbf{CP} yra statmenas vektoriui \mathbf{AB} . Tada

$$\begin{aligned} \mathbf{CP} \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\ (\mathbf{OP} \Leftrightarrow \mathbf{OA}) \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\ (\mathbf{OA} + t\mathbf{AB} \Leftrightarrow \mathbf{OA}) \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\ (\mathbf{CA} + t\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\ \mathbf{CA} \cdot \mathbf{AB} + t\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB} + t\|\mathbf{AB}\|^2 &= 0 \\ t &= \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB}\|^2}. \end{aligned}$$

Vektoriai \mathbf{CP} ir \mathbf{PA} yra statmeni, todėl iš Pitagoro teoremos trikampiui PAC (kampas prie viršūnės $P \Leftrightarrow$ status) turime:

$$\begin{aligned} CP^2 &= AC^2 \Leftrightarrow PA^2 \\ &= AC^2 \Leftrightarrow \|t\mathbf{AB}\|^2 \\ &= AC^2 \Leftrightarrow t^2 AB^2 \\ &= AC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB}\|^2} \right)^2 AB^2 \\ &= \frac{AC^2 \cdot AB^2 \Leftrightarrow (\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB})^2}{AB^2}. \end{aligned}$$

O tai ir reikėjo įrodyti.

Įrodyta.