Algebra ir geometrija informatikams. Paskaitų konspektas. Rimantas Grigutis

11 paskaita. *Plokštuma erdvėje.*

Teorema. Tegu a, b, c, d tokie skaičiai, kad $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Tada lygybė

$$ax + by + cz + d = 0$$

yra kai kurios plokštumos taškų lygtis. Kitą vertus, bet kurios plokštumos P lygtis turi tokį pavidalą.

Įrodymas. $(\Leftarrow)$. Tegu $A_0\,(x_0, y_{0,} z_0) \Leftrightarrow$ plokštumos P taškas, o $\mathbf{n} = (a, b, c)$ - vektorius, statmenas šiai plokštumai. Jei $A\,(x, y, z) \Leftrightarrow$ bet kuris plokštumos P taškas, tai vektoriai $\mathbf{A}_0\mathbf{A} = (x \Leftrightarrow x_0, y \Leftrightarrow y_0, z \Leftrightarrow z_0)$ ir $\mathbf{n}$ yra statmeni, todėl

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A} = 0$$

arba

$$a\,(x \Leftrightarrow x_0) + b\,(y \Leftrightarrow y_0) + c\,(z \Leftrightarrow z_0) = 0.$$

Taigi, plokštumos P lygtis yra

$$ax + by + cz + d = 0,$$

čia $d = \Leftrightarrow ax_0 \Leftrightarrow by_0 \Leftrightarrow cz_0$.
$(\Rightarrow)$. Tegu x_0, y_0, z_0 - yra lygties $ax + by + cz + d = 0$ sprendinys:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Tada teisinga

$$a\,(x \Leftrightarrow x_0) + b\,(y \Leftrightarrow y_0) + c\,(z \Leftrightarrow z_0) = 0.$$

Tegu apibrėžti :vektorius $\mathbf{n} = (a, b, c)$, taškai $A_0\,(x_0, y_{0,} z_0)$ ir $A\,(x, y, z)$. Tada paskutiniąją lygybę galima užrašyti vektorine forma:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A} = 0.$$

Turime, kad kad visi plokštumos, einančios per tašką $A_0(x_0, y_0, z_0)$ ir statmenos vektoriui $\mathbf{n}$, taškai ir tik jie tenkina paskutiniąją lygtį. Todėl tai ir yra šios plokštumos lygtis, kurią vadina **bendrąja lygtimi**.

Įrodyta.

Aptarkime plokštumos $P : ax + by + cy + d = 0$ padėtį koordinatinių ašių atžvilgiu.

Galimi šie atvejai.

1) $a = b = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (0, 0, c)$ lygiagretus Oz ašiai. Plokštuma P lygiagreti xy plokštumai.

2) $b = c = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (a, 0, 0)$ lygiagretus Ox ašiai. Plokštuma P lygiagreti yz plokštumai.

3) $a = c = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (0, b, 0)$ lygiagretus Oy ašiai. Plokštuma P lygiagreti xz plokštumai.

4) $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (0, b, c)$ statmenas Ox ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Ox ašiai.

5) $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (a, 0, c)$ statmenas Oy ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oy ašiai.

6) $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (a, b, 0)$ statmenas Oz ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oz ašiai.

7) $d = 0$. Plokštuma eina per tašką $(0, 0, 0)$.

Padalię plokštumos P lygtį $ax + by + cy + d = 0$ iš $\Leftrightarrow d$ ir pažymėję

$$\alpha = \Leftrightarrow \frac{d}{a}, \beta = \Leftrightarrow \frac{d}{b}, \gamma = \Leftrightarrow \frac{d}{c}$$

turėsime plokštumos lygtį

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1,$$

kurią vadina **ašine plokštumos lygtimi.** Skaičiai α, β, γ koordinačių pradžios taško $(0, 0, 0)$ atstumai iki koordinatinių ašių taškų, kuriuos iškerta plokštuma P : Ox ašyje taškas $(\alpha, 0, 0)$, Oy ašyje taškas $(0, \beta, 0)$, Oz ašyje taškas $(0, 0, \gamma)$.

Rasime taško atstumą iki duotos plokštumos.

Teorema. Taško $A_0\,(x_0, y_0, z_0)$ atstumas D iki plokštumos $P : ax + by + cz + d = 0$, yra lygus

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Įrodymas. Tegu $B\,(x_1, y_1, z_1)$ bet kuris plokštumos P taškas, o plokštumos normalės vektoriaus $\mathbf{n} = (a, b, c)$ pradžia yra taške B. Tada atstumas D yra lygus vektoriaus $\mathbf{BA}_0$ projekcijos į vektrorių $\mathbf{n}$ ilgiui:

$$D = \|proj_{\mathbf{n}}\mathbf{BA}_0\| = \frac{|\mathbf{BA}_0 \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Turime

$$\begin{aligned} \mathbf{BA}_0 &= (x_0 \Leftrightarrow x_1, y_0 \Leftrightarrow y_1, z_0 \Leftrightarrow z_1) \\ \mathbf{BA}_0 \cdot \mathbf{n} &= a\,(x_0 \Leftrightarrow x_1) + b\,(y_0 \Leftrightarrow y_1) + c\,(z_0 \Leftrightarrow z_1) \\ \mathbf{n} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Tada

$$D = \frac{|a\,(x_0 \Leftrightarrow x_1) + b\,(y_0 \Leftrightarrow y_1) + c\,(z_0 \Leftrightarrow z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Taškas B yra plokštumos P taškas, todėl jo koordinatės tenkina plokštumos P lygtį:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ir

$$d = \Leftrightarrow ax_1 \Leftrightarrow by_1 \Leftrightarrow cz_1.$$

Iš čia gauname reikiamą D išraišką.
Įrodyta.

Aptarsime dviejų ir trijų plokštumų padėtį erdvėje.

Teorema (dviejų plokštumų padėtis erdvėje). Tegu plokštumų P_1 ir P_2 lygtys yra:

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

1) Plokštumos P_1 ir P_2 lygiagrečios tada ir tik tada, kai

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

2) Plokštumos P_1 ir P_2 statmenos tada ir tik tada, kai

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

3) Kampo tarp ploštumų φ kosinusas yra lygus:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1 ir P_2 atitinkamai. Tada

1) $P_1 \parallel P_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}.$

2) $P_1 \perp P_1 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$

3) Kampas φ yra kampas tarp normalės vektorių $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$. Todėl

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodyta.

Teorema (trijų plokštumų padėtis erdvėje). Tegu plokštumų P_1, P_2 ir P_3 lygtys yra:

$$\begin{aligned} P_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ P_3 &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{aligned}$$

1) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 kertasi viename taške $\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

2) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios vienai tiesei $\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ir $\mathbf{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1, P_2 ir P_3 atitinkamai. Tada

1) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 kertasi viename taške $\iff$ vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir $\mathbf{n}_3$ nėra lygiagretūs vienai plokštumai (jei būtų lygiagretūs vienai plokštumai, tai kirsdamiesi taške, kirstųsi ir tiese)$\iff$vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir $\mathbf{n}_3$ yra nekomplanarūs$\iff$
$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

2) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios vienai tiesei $\iff$vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir $\mathbf{n}_3$ lygiagretūs vienai plokštumai$\iff$vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir $\mathbf{n}_3$ yra komplanarūs$\iff$
$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

Įrodyta.

Galima viena iš aštuonių trijų plokštumų P_1, P_2 ir P_3 padėčių erdvėje. Jas aprašysime tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

sprendiniais.

Pažymėkime sistemos matricą A, o sistemos išplėstinę matricą B. Tada:

rank$A = 1$, rank$B = 2$

1) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\begin{array}{c} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \\ \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3} \\ \frac{a_2}{a_2} = \frac{b_2}{b_2} = \frac{c_2}{c_2} \neq \frac{d_2}{d_2} \end{array}$$

2) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos sutampa ir lygiagrečios trečiąjai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\begin{array}{c} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \\ \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3} \end{array}$$

rank$A = 2$, rank$B = 3$

3) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos lygiagrečios viena kitai ir nelygiagrečios trečiai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, $\mathbf{n}_3$ nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

4) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos kertasi teise, lygiagrečia trečiąjai plokštumai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs

rank$A = 3$

5) sistema suderinta $\Rightarrow$ plokštumos kertasi viename taške$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ -nekomplanarūs

rank$A =$rank$B = 1$

6) sistema suderinta $\Rightarrow$ visos plokštumos sutampa$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\begin{array}{c} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \\ \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{d_1}{d_3} \end{array}$$

rank$A =$rank$B = 2$

7) sistema suderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos sutampa ir nelygiagrečios trečiąjai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, $\mathbf{n}_3$ nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

8) sistema suderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos kertasi teise, esančia trečioje plokštumoje$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs.