8 paskaita. *Kompleksiniai skaičiai.*

Įvadas. Kompleksinių skaičių aibę $\mathbf{C}$ galima apibrėžti 2×2 matricomis.

Apibrėžimas. Kompleksiniu skaičiumi *vadiname matricą*

$$\begin{pmatrix} a & \Leftrightarrow b \\ b & a \end{pmatrix},$$

čia a ir b⇔ realieji skaičiai.

Kompleksinį skaičių $[a] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ vadinsime realiu kompleksiniu skaičiumi. Aukščiau matėme, kad tokias matricas galima sutapatinti su pačiu realiu skaičiumi a. Pagrįsime šį sutapatinimą.

Realius kompleksinius skaičius $[a]$ ir $[b]$ vadinsime atitinkamai realiąja ir menamąja kompleksinio skaičiaus $\begin{pmatrix} a & \Leftrightarrow b \\ b & a \end{pmatrix}$ dalimi. Kompleksinį skaičių $\begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ žymėsime raide i.

Tada

$$\begin{pmatrix} a & \Leftrightarrow b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$= [a] + i\,[b]$$

ir

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix} = [\Leftrightarrow 1].$$

Du kompleksiniai skaičiai yra lygūs tada ir tik tada, kai lygios jų realios ir menamos dalys:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \Leftrightarrow b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = [a_1] + i\,[b_1] = [a_2] + i\,[b_2] = \begin{pmatrix} a_2 & \Leftrightarrow b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ir } b_1 = b_2.$$

Iš čia tiesiogiai turime, kad kompleksinis skaičius lygus nuliui tada ir tik tada, kai jo realioji ir menamoji dalys lygios nuliui:

$$[a] + i\,[b] = [0] \Leftrightarrow a = 0 \text{ ir } b = 0.$$

Realių kompleksinių skaičių aritmetika tokia pat kaip ir pačių realių skaičių:

$$[a] + [b] = [a + b] \text{ ir } [a]\,[b] = [ab]\,.$$

Realių kompleksinių skaičių aibė sudaro kūną. Skaitytojui paliekame savarankiškai įsitikinti, kad šiems skaičiams teisingos visos kūno aksiomos:

K1. $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])\,.$
K2. $[a] + [b] = [b] + [a]\,.$
K3. $[a] + [0] = [a]\,.$
K4. $[a] + [-a] = [0]\,.$
K5. $([a]\,[b])\,[c] = [a]\,([b]\,[c])\,.$
K6. $[a]\,[b] = [b]\,[a]\,.$
K7. $[a]\,[1] = [a]\,.$
K8. Su visais $a \neq 0$ teisinga $[a]\,[a^{-1}] = [1]\,.$
K9. $[a]\,([b] + [c]) = [a]\,[b] + [a]\,[c]\,.$
K10. $[0] \neq [1]\,.$

Pastebėsime, kad

$$\begin{gathered} [a] - [b] = [a] + (-[b]) = [a] + [-b] = [a - b] \text{ ir} \\ \frac{[a]}{[b]} = [a]\,[b]^{-1} = [a]\,[b^{-1}] = [ab^{-1}] = \left[\frac{a}{b}\right]. \end{gathered}$$

Taigi realius kompleksinius skaičius $[a]$ galime sutapatinti su pačiais realiais skaičiais a ir kompleksinį skaičių $[a] + i\,[b]$ žymėti tiesiog $a + ib$.

Žvilgtelkim įdėmiau į pačių kompleksinių skaičių aritmetiką.

Dviejų kompleksinių skaičių suma irgi yra kompleksinis skaičius:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)\,.$$

Dviejų kompleksinių skaičių sandauga irgi yra kompleksinis skaičius:

$$\begin{gathered} (a_1 + ib_1)\,(a_2 + ib_2) \\ = a_1\,(a_2 + ib_2) + (ib_1)\,(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1\,(ib_2) + (ib_1)\,a_2 + (ib_1)\,(ib_2) \\ = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 + (-1)\,b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,. \end{gathered}$$

Skaitytojui paliekame savarankiškai įsitikinti, kad kompleksinių skaičų aibė $\mathbf{C}$ sudėties ir sandaugos atžvilgiu sudaro kūną. Pastebėsime tik, kad kompleksinio skaičiaus $a+ib$ priešingas skaičius yra $(⇔a)+i\,(⇔b)$, o jei $a+ib \neq 0$, t.y. $a^2+b^2 \neq 0$, tai atvirkštinis kompleksinis skaičius yra $(a+ib)^{-1} = c+id = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$.

Geometrinis kompleksinių skaičių apibrėžimas. Kompleksiniu skaičiumi z vadiname realiųjų skaičių porą (a,b), kurią reikšiame lygybe $z = a+ib$; skaičius a vadinamas *realiąja* z dalimi ir žymimas $a = \mathrm{Re}(z)$; skaičius b vadinamas *menamąja* z dalimi ir žymimas $b = \mathrm{Im}(z)$.

Iš apibrėžimo matome, kad kiekvienam kompleksiniam skaičiui $z = a+ib$ galima vienareikšmiškai priskirti plokštumos, kurioje yra Dekarto koordinačių sistema, tašką (a,b). Ši kompleksinių skaičių plokštuma dar vadinama Gauso skaičių plokštuma(Gauss'sche Zahlenebene) arba . Šis reiškimas pasiteisina jau ir tuo, kad pagrindiniai kompleksinių skaičių veiksmai paprastai interpretuojami geometriškai: dviejų kompleksinių skaičių $a+ib$ ir $c+id$ sudėtis interpretuojama kaip dvimačių vektorių (a,b) ir (c,d) suma $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ (prisiminkime lygiagretainio taisyklę).

Sandaugos veiksmo interpretacijai naudojamas **trigonometrinis** kompleksinio skaičiaus $z = a+ib$ reiškimas, įvedant xy plokštumoje taško (a,b) **polines koordinates** $[r,\varphi]$: čia r⇔taško $A = (a,b)$ atstumas iki taško $O = (0,0)$, kuris vadinamas poliumi, o φ⇔kampas tarp teigiamos x⇔ašies ir spindulio OA. Pastebėsime, kad su kiekvienu $r > 0$ kampas φ yra apibrėžiamas $360°$ (arba 2π) kampo kartotinio tikslumu; beto kai $r = 0$, kampas φ neapibrėžiamas. Taigi, kiekvieną kompleksinį skaičių $z = a+ib$ galime reikšti:

$$z = [r,\varphi], \qquad r \geq 0, \qquad 0° \leq \varphi < 360° \ (\ 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Ryšis tarp dviejų kompleksinio skaičiaus z reiškimų $z = a+ib = (a,b)$ ir $z = [r,\varphi]$ yra formulėse:

$$\begin{cases} a = r\cdot\cos\varphi \\ b = r\cdot\sin\varphi \end{cases} ;$$

ir

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ r \neq 0 \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} .$$

Kompleksinio skaičiaus z koordinatės polinėje koordinačių sistemoje $[r, \varphi]$ yra vadinamos ir reiškiamos:

$r = |z| \Leftrightarrow$ skaičiaus z **modulis**, $\varphi = \arg z \Leftrightarrow$ skaičiaus z **argumentas**.

Jeigu kompleksinio skaičiaus argumentą neapribosime intervalu $[0, 2\pi)$, tai du kompleksiniai skaičiai $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ ir $z_2 = [r_2, \varphi_2]$ yra lygūs tada ir tik tada, kada

arba $r_1 = r_2 = 0$ ir $\varphi_1, \varphi_2 \Leftrightarrow$ bet kokie kampai,

arba $r_1 = r_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$ su visais $k \in \mathbf{Z}$.

Grįžkime prie geometrinės sandaugos veiksmo interpretacijos. Tegu

$$z_1 = [r_1, \varphi_1] = r_1 \cos \varphi_1 + i r_1 \sin \varphi_1$$

ir

$$z_2 = [r_2, \varphi_2] = r_2 \cos \varphi_2 + i r_2 \sin \varphi_2.$$

Tada

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \Leftrightarrow \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \right) = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$

ir todėl

$z_1 z_2 = [r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2]$, t.y.

$$\begin{cases} |z_1 z_2| & = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg (z_1 z_2) & = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}.$$

Skaičiaus z_1 sandauga su skaičiumi z_2 geometriškai galime interpretuoti kaip skaičiaus z_1 posūkį kampu φ_2 ir "ištempimą" r_2 kartus. Toks kompleksinių skaičių sandaugos interpretavimas nesunkiai leidžia paaiškinti skaičiaus $z \neq 0$ atvirkštinio skaičiaus $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ geometrinę prasmę.

Apibrėžimas. *Tegu* $z = a + ib \in \mathbf{C}$. *Skaičius* $\bar{z} = a \Leftrightarrow ib \in \mathbf{C}$ *vadinamas skaičiaus* z **jungtiniu skaičiumi**.

Yra teisingos šios lygybės:

$\dfrac{z + \bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$, $\dfrac{z \Leftrightarrow \bar{z}}{2i} = \mathrm{Im}(z)$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Išraiška $N(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$ vadinama skaičiaus z **norma**.

Tegu dabar

$$z = [r, \varphi], \text{ o } \quad z^{-1} = [q, \psi].$$

Tada

$$z \cdot z^{-1} = [r, \varphi] \cdot [q, \psi] = [r \cdot q, \varphi + \psi] = 1 = [1, 0],$$

t.y.

$$r \cdot q = 1, \qquad \varphi + \psi = 0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ir

$$q = r^{-1}, \qquad \psi = \Leftrightarrow\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ ir pvz. } \psi = \Leftrightarrow\varphi.$$

Atsižvelgę į tai, kad $\cos(\Leftrightarrow\varphi) = \cos\varphi$, o $\sin(\Leftrightarrow\varphi) = \Leftrightarrow\sin\varphi$, turime, kad
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z^{-1} = r^{-1}(\cos\varphi \Leftrightarrow i\sin\varphi) \\ \bar{z} = r(\cos\varphi \Leftrightarrow i\sin\varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = r^2$
$\Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{r^2} \quad .$

Tegu dabar $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ ir $z_2 = [r_2, \varphi_2]$, $z_2 \neq 0$(t.y. $r_2 \neq 0$).
Tada

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2\right].$$

Dabar induktyviai apibrėšime kompleksinio skaičiaus z laipsnį z^n, $n \in \mathbf{N}$:

$$z^0 = 1, \qquad z^{n+1} = z^n \cdot z \qquad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Tada

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^n = [r^n, n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Žinodami, kad $z^{-1} = [r^{-1}, \Leftrightarrow\varphi]$ ir $z^{-n} = (z^{-1})^n$, tai

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^{-n} = [r^{-n}, \Leftrightarrow n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Taigi

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow z^n = [r^n, n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{Z},$$

t.y.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ su visiais } n \in \mathbf{Z}.$$

Ši išraiška vadinama **Muavro** (*Abraham de Moivre*,1667-1754) **formule**.
Apibrėšime dabar šaknies traukimo veiksmą iš kompleksinio skaičiaus.

Apibrėžimas. *$n\Leftrightarrow$ojo laipsnio šaknimi iš kompleksinio skaičiaus z vadiname tokius kompleksinius skaičius w, kuriems teisinga lygybė $w^n = z$.*

Parodysime, kad egzistuoja lygiai $n, n \geq 2$, n - ojo laipsnio šaknų iš kompleksinio skaičiaus z.

Tegu

$$z = [r,\varphi] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ o } w = [q,\psi] = q(\cos\psi + i\sin\psi) \text{ ir } w^n = z.$$

Tada

$$[q^n, n\cdot\psi] = [r,\varphi].$$

Jeigu $z = 0$, tai ir $r = 0$, todėl $q^n = 0 \Rightarrow q = 0$, t.y. $w = 0$.
Jeigu $z \neq 0$, tai ir $r \neq 0$, todėl

$$\begin{array}{lll} q^n = r, & n\cdot\psi = \varphi + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \\ \Rightarrow q = \sqrt[n]{r}, & \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, & k \in \mathbf{Z}.. \end{array}$$

Jeigu $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, tai iš lygybės

$$\frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} + 2\pi\cdot l, \qquad l \in \mathbf{Z}$$

turime, kad

$$k_1 \Leftrightarrow k_2 = l\cdot n \qquad \text{su kažkuriuo } l \in \mathbf{Z}.$$
$$k_1 \Leftrightarrow k_2 \text{ dalijasi iš } n.$$

Gavome: jeigu $z \neq 0$ ir $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbf{C}$, tai $n\Leftrightarrow$ojo laipsnio šaknimis yra kompleksiniai skaičiai

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k \in \mathbf{Z},$$

ir du tokie skaičiai w_{k_1} ir w_{k_2} yra lygūs tada ir tik tada, kada $k_1 \Leftrightarrow k_2$ dalijasi iš n. Visos skirtingos $n\Leftrightarrow$ojo laipsnio šaknys iš kompleksinio skaičiaus z yra $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$.

Teiginys. *Tegu* $z = a + ib,\ z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}$. *Tada yra teisingos šios savybės.*
1) $\overline{(\bar{z})} = z$,

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \textit{ atskiru atveju } \overline{\Leftrightarrow z} = \Leftrightarrow \bar{z}.$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \textit{ atskiru atveju } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

2) Jeigu $N(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$, *tai*

$$N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2) \textit{ ir } N\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{N(z_1)}{N(z_2)} \textit{ su visiais } z_2 \neq 0.$$

3) Jeigu $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, *tai*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \textit{su visiais } z_2 \neq 0.$$

4) (Trikampio nelygybė).

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Įrodymas. Įrodysime trikampio nelygybę:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 =$$
$$|z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1 \cdot \bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2 =$$
$$(|z_1| + |z_2|)^2 .$$

Ištraukę aritmetinę kvadratinę šaknį, turėsime

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

Įrodyta.

Išvados. Iš trikampio nelygybės turime

$$|z_1 \Leftrightarrow z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$\left. \begin{array}{l} |z_1 + z_2| \geq |z_1| \Leftrightarrow |z_2| \\ |z_1 + z_2| \geq |z_2| \Leftrightarrow |z_1| \end{array} \right\} \Rightarrow |z_1 + z_2| \geq ||z_1| \Leftrightarrow |z_2||$$

taigi su visais $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ yra teisinga

$$||z_1| \Leftrightarrow |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$