7 paskaita(2002 10 18) *Matricos.*

Matricų aibė $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$.

Matrica yra stačiakampė lentelė su joje įrašytais skaičiais. Matricų, kuriose yra m eilučių ir n stulpelių, sakysime $m \times n$ *matricos,* aibę žymėsime $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$, čia $\mathbf{F}$⇔ arba racionaliųjų skaičių aibė $\mathbf{Q}$, arba realiųjų skaičių aibė $\mathbf{R}$. Pačias matricas žymėsime didžiosiomis lotyniškomis raidėmis, o lygybė $A = (a_{ij})$ reikš, kad matricos elementai yra skaičiai a_{ij}. Pats skaičius a_{ij} yra i⇔oje eilutėje ir j⇔ame stulpelyje. Dažnai skaičių $a_{ij} \in \mathbf{F}$ žymi ir taip : $a_{ij} = (A)_{ij}$. Mes naudosimės abiem žymenimis.

Sakysime, kad dvi $m \times n$ matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ yra lygios, $A = B$, jei $a_{ij} = b_{ij}$ su visais i ir j.

Matricų aibėje $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$ yra apibrėžiami šie veiksmai:

Matricų sudėtis:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \text{ t.y. } (A+B)_{ij} = (A)_{ij}.$$

Matricos daugyba iš skaičiaus:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \text{ t.y. } (\lambda A)_{ij} = \lambda (A)_{ij}.$$

Apibrėžimai.

1) *Matricos A priešinga matrica vadinsime matricą $(⇔1) \cdot A = ⇔A$.*

2) Matricą $O = (o_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$, $o_{ij} = 0$ su visais i ir j, vadinsime nuline matrica.

Matricų aibėje $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$, kurioje apibrėžti sudėties ir daugybos iš skaičiaus veiksmai, yra teisingos šios savybės(čia λ, μ⇔ skaičiai, A, B ir C⇔ matricos iš $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$):

V1.(sudėties asociatyvumas) $(A+B)+C = A+(A+C)$.
V2.(sudėties komutatyvumas) $A+B = B+A$.
V3.(nulinės matricos egzistavimas) $O+A = A$.
V4.(priešingos matricos egzistavimas) $A+(\Leftrightarrow A) = O$.
V5. $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$.
V6. $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$.
V7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.
V8. $1\cdot A = A$.

Tegu $A_1,...,A_s \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$, o $\alpha_1,...,\alpha_s \in \mathbf{F}$. Matricą $\alpha_1 A_1+\cdots+\alpha_s A_s$ vadina matricų $A_1,...,A_s$ **tiesine kombinacija**. Parodysime, kaip tiesinių lygčių sistemą reikšti stulpelių tiesine kombinacija.

Tegu turime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{1}$$

Pažymėkime stulpelius:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tada sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n = B.$$

Taigi, norint išspręsti tiesinių lygčių sistemą (1) reikia mokėti stulpelį B reikšti stulpelių $A_1, A_2, ..., A_n$ tiesine kombinacija.

Matricų sandauga.

Apibrėžimas. *Matricų A ir B sandauga $A \cdot B = AB$ apibrėžiama tik tada kai matricos A stulpelių skaičius sutampa su matricos B eilučių skaičiumi. Jeigu $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$ ir $B = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{n\times l}$, tai matrica $AB \in \mathbf{M}_{m\times l}$* ir

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} (A)_{is} (B)_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Pavyzdžiai.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 2\cdot(-4) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Sandauga $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ neapibrėžta.

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 41 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 19 & 34 \end{pmatrix}$.

Matome, kad sandauga tarp matricų ne visada apibrėžta, o kai net apibrėžtata - ne visada komutatyvi(tai rodo paskutiniai du pavyzdžiai).

Tiesinų lygčių sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matricų sandaugos veiksmo savybės:

S1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
S2.(sandaugos asociatyvumas) $(AB)C = A(BC)$.
S3. (distributyvumas) $(A+B)C = AC + BC$.
S4. (distributyvumas) $D(A+B) = DA + DB$.

Kaip pavyzdį įrodysime sandaugos asociatyvumą.

Jeigu lygybės $(AB)C = A(BC)$ abi pusės yra apbrėžtos, tai $A \in \mathbf{M}_{m\times n}, B \in \mathbf{M}_{n\times r}, C \in \mathbf{M}_{r\times s}$. Tada $AB \in \mathbf{M}_{m\times r}$, $(AB)C \in \mathbf{M}_{m\times s}$ ir $BC \in \mathbf{M}_{n\times s}$, $A(BC) \in \mathbf{M}_{m\times s}$. Taigi matricos $(AB)C$ ir $A(BC)$ yra to pačio dydžio. Turime

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{u=1}^{r}(AB)_{iu}\cdot(C)_{uj} = \sum_{u=1}^{r}\left(\sum_{v=1}^{n}(A)_{iv}(B)_{vu}\right)\cdot(C)_{uj} =$$
$$\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}}\left(\sum_{v=1}^{n}((A)_{iv}(B)_{vu})\cdot(C)_{uj}\right) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}}\left(\sum_{u=1}^{r}(A)_{iv}\cdot\left((B)_{vu}(C)_{uj}\right)\right) =$$
$$\sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}}\left((A)_{iv}\cdot\sum_{u=1}^{r}\left((B)_{vu}(C)_{uj}\right)\right) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}}\left((A)_{iv}\cdot(BC)_{vj}\right) = (A(BC))_{ij}\,.$$

Čia pasinaudojome skaičių distributyvumo savybe:
$\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}}\sum_{v=1}^{n} d_{uv} = \sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}}(d_{u1} + d_{u2} + \cdots + d_{un}) =$
$(d_{11} + d_{12} + \cdots + d_{1n}) + (d_{21} + d_{22} + \cdots + d_{2n}) + \cdots + (d_{r1} + d_{r2} + \cdots + d_{rn}) =$
$(d_{11} + d_{21} + \cdots + d_{r1}) + (d_{12} + d_{22} + \cdots + d_{r2}) + \cdots + (d_{1n} + d_{2n} + \cdots + d_{rn}) =$
$\sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}}(d_{1v} + d_{2v} + \cdots + d_{rv}) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}}\sum_{u=1}^{r} d_{uv}$.

Įrodyta.

Paaiškinsime matricų sandaugos veiksmo apibrėžimą tiesininių keitinių kompozicijos veiksmu. Tegu turime du tiesinius kintamųjų keitinius:

$$\begin{array}{l} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_k + \cdots + b_{kn}x_n \end{array}$$

ir

$$\begin{gathered}
z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1k}y_k \\
z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2k}y_k \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
z_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mk}y_k \ .
\end{gathered}$$

Užrašykime šiuos keitinius matricomis:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

čia $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times k}$ ir $B = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{k\times n}$ - keitinių matricos.
Tada tiesinio keitinio

$$\begin{gathered}
z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_n \\
z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
z_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mk}x_n
\end{gathered}$$

matrica $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$ yra lygi AB :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_m \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas. *Kvadratinė matrica* $I_n = (\delta_{ij}) \in \mathbf{M}_{n\times n}$, $\delta_{ij} = \left[\begin{array}{l} 1, \text{ kai } i = j \\ 0, \text{ kai } i \neq j \end{array} \right.$ *vadinama* $n \Leftrightarrow$ *osios eilės vienetine matrica.*

Akivaizdu ,kad su visomis matricomis $A \in \mathbf{M}_{r\times n}$ ir $B \in \mathbf{M}_{n\times s}$ teisingos lygbes:

$$A \cdot I_n = I_r \cdot A = A \text{ ir } I_n \cdot B = B \cdot I_s = B.$$

Kvadratinių matricų aibė $\mathbf{M}_n$.

Nagrinėkime kvadratinių matricų aibę $\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_n(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_n$. Aibėje $\mathbf{M}_n$ yra apibrėžtos trys operacijos: matricų suma, matricos sandauga iš skaičiaus ir matricų sandauga. Šių operacijų atžvilgiu teisingos šios savybės: *V1-V8*; *S1-S4*. Beto teisinga dar viena savybė:

S5.(vienetinės matricos egzistavimas) $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ su visomis $A \in \mathbf{M}_n$.

Atsižvelgę į tai, kad

$$\lambda \cdot A = (\lambda I_n) \cdot A \text{ su visomis } A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F}) \text{ ir } \lambda \in \mathbf{F},$$

į kvadratinių matricų aibę $\mathbf{M}_n(\mathbf{F})$ galima žiūrėti kaip į aibės $\mathbf{F}$ "*išplėtimą*", jeigu skaičių λ sutapatinsime su matrica $\lambda \cdot I_n$ ir apibrėšime funkciją $f : \lambda \to \lambda \cdot I_n$, kuri yra bijekcija iš aibės $\mathbf{F}$ į aibę $\mathbf{M}_n(\mathbf{F})$, tenkinanti savybes(sakoma: "*išlaiko operacijas*"):

$$f(\lambda + \mu) = f(\lambda) + f(\mu)$$
$$f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu).$$

Pastebėkime, kad skaitinės aibės $\mathbf{Q}$ ir $\mathbf{R}$ pasižymi dar dviejomis sandaugos veiksmo savybėmis:

S6.(sandaugos komutatyvumas) Su visais λ ir $\mu \in \mathbf{F}$ teisinga $\lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda$.

S7.(atvirkštinio elemento egzistavimas)Su visais $\lambda \neq 0, \lambda \in F$ egzistuoja atvirkštinis skaičius: $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} : \lambda \cdot (\lambda^{-1}) = 1$.

Mes jau žinome, kad kvadratinių matricų aibėje $\mathbf{M}_n(\mathbf{F})$ negalioja sandaugos komutatyvumo savybė (ne su visomis matricomis A ir B teisinga $AB = BA$). Aptarkime dabar kvadratinių matricų aibėje savybę *S7.*

Apibrėžimas. *Sakome, kad kvadratinė matrica* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$ *turi atvirkštinę matricą, jeigu egzistuoja tokia kvadratinė matrica* $B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$, *kad*

$$AB = BA = I_n.$$

Teiginys (atvirkštinės matricos vienatinumas). Jeigu B ir C yra matricos A atvirkštinės, tai $B = C$.

Įrodymas. Tegu matricos B ir C yra matricos A atvirkštinės:
$AB = BA = I_n$ ir $AC = CA = I_n$. Tada

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Įrodyta.

Pastaba. *Matricos A atvirkštinę matricą žymi A^{-1} :*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Teorema. *Tegu $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$. Visos žemiau pateiktos sąlygos yra ekivalenčios.*
1. *Matrica A - neišsigimusi.*
2. *Homogeninių tiesinių lygčių sistema $AX = O$ turi vienintėlį sprendinį. Čia* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ir $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. $\det A \neq 0$.
4. *Matrica A turi atvirkštinę matricą.*
5. *Su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.*

Prieš įrodant šią teoremą be įrodymo suformuluosime teiginį, kuriuo pasinaudosime teoremos įrodyme.

Teiginys. *Tegu matricos A ir B tokios, kad apibrėžta AB. Tada*

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} A,$$
$$\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} B.$$

Teoremos įrodymas. Jau aukščiau matėme, kad $1 \Leftrightarrow 2$ (išvada iš Kroneckerio-Capellio teoremos) ir $1 \Leftrightarrow 3$ (praeitos paskaitos teiginys). Dabar įrodysime teiginius $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 5$. Turime, kad rank$A = n$. Tada

$$\text{rank}A \leq \text{rank}(A|B) \leq n.$$

Todėl

$$\text{rank}A = \text{rank}(A|B) = n$$

ir pagal Kroneckerio-Capellio teoremą tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Įrodyta.

$5 \Rightarrow 4$. Turime, kad su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Tegu stulpelis X_1 yra sistemos $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys, stulpelis X_2 - sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys ,..., stulpelis X_n - sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sprendinys. Tada kvadratinei matricai $Y = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$ teisinga:

$$AY = (AX_1|AX_2|\cdots|AX_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Parodysime, kad teisinga ir $YA = I_n$, t.y. matrica $Y = A^{-1}$.

Turime

$$n = \text{rank}I_n = \text{rank}AY = \text{rank}Y \leq n.$$

Todėl rank$Y = n$ ir matricai Y, kaip ir matricai A, galioja 5 sąlyga, iš kurios mes gauname, kad egzistuoja matrica Z, su kuria $YZ = I_n$.

Tada

$$YA = YAI_n = YAYZ = YI_nZ = YZ = I_n.$$

Įrodyta.
$4 \Rightarrow 1$. Tegu matrica A turi atvirkštinę:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Tada

$$\mathrm{rank} AA^{-1} = \mathrm{rank} I_n = n$$

ir

$$n = \mathrm{rank} AA^{-1} \leq \mathrm{rank} A \leq n,$$

todėl $\mathrm{rank} A = n$ ir matrica A yra neišsigimusi.
Įrodyta.
Teorema įrodyta.

Pratimas. Su kiekviena kvadratine matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ nagrinėkime matricą $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, čia $A_{ij} = (\Leftrightarrow 1)^{i+j} M_{ij}$, $M_{ij} \Leftrightarrow$ matricos A minoras. Skaičių A_{ij} vadiname **adjunktu**, o pačią matricą $\tilde{A}$ - **jungtine matricai** A **matrica.** Pasinaudoję adjunktų savybe

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \left[\begin{array}{c} \det A, \text{ jei } i = j \\ 0, \text{ jei } i \neq j \end{array} \right.,$$

įrodykite, kad $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

PRIEDAS.

Apibrėžimas. *Tegu* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. *Matricą* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *vadiname transponuota matrica. Turime* $\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$.

Matricos transponavimo operacija tenkina šias savybes:

T1. $(A+B)^T = A^T + B^T$, kai $A, B \in \mathbf{M}_{m\times n}$.
T2. $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$, su visais λ.
T3. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, kai $A \in \mathbf{M}_{m\times r}$, $B \in \mathbf{M}_{r\times n}$.
T4. $\left(A^T\right)^T = A$.

Kaip pavyzdį įrodysime T3 savybę.

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{u=1}^{r} (A)_{ju} (B)_{ui} =$$
$$\sum_{u=1}^{r} \left(A^T\right)_{uj} \left(B^T\right)_{iu} = \sum_{u=1}^{r} \left(B^T\right)_{iu} \left(A^T\right)_{uj} = \left(B^T \cdot A^T\right)_{ij}.$$

Įrodyta.

Teiginys(matricų, turinčių atvirkštines, savybės). *Tegu* $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F}) \Leftrightarrow$ *matricos, turinčios atvirkštines. Tada:*
1. $AB \Leftrightarrow$ *matrica, turinti atvirkštinę, ir* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $A^{-1} \Leftrightarrow$ *matrica, turinti atvirkštinę, ir* $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Matrica I_n *turi atvirkštinę.*
4. Matrica A^T *turi atvirkštinę:* $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Įrodymas.1. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ ir $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.
2 ir 3. akivaizdu.
4. $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ ir $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$.
Įrodyta.

Apibrėžimas. *Matematinių objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba iš skaičiaus, priklausančio* **F**, *ir šie veiksmai tenkina savybes V1⇔V8, vadinama vektorine erdve virš* **F**.

Turime, kad matricų aibė $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$ yra vektorinė erdvė virš **F**. Tuo atveju, kai $m = 1$, sakome, kad turime eilučių vektorinę erdvę $\mathbf{M}_{1\times n}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^n$ (vadiname **aritmetine eilučių vektorine erdve**), o kai $n = 1$, sakome, kad turime stulpelių vektorinę erdvę $\mathbf{M}_{m\times 1}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_m$ (vadiname **aritmetine stulpelių vektorine erdve**).

Apibrėžimas. *Matematinių objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis , daugyba iš skaičiaus, priklausančio F, ir daugyba, ir šie veiksmai tenkina savybes V1⇔V8 ir S1-S4 vadinama* ***algebra virš*** **F**.

Turime, kad kvadratinių matricų aibė $\mathbf{M}_n(\mathbf{F})$ yra algebra virš **F**. Pačios skaitinės aibės **Q** ir **R** yra algebros virš savęs.

Apibrėžimas. *Matematinių objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba, ir šie veiksmai tenkina savybes analogiškos savybėms V1⇔V4 ir S2-S7 vadinama* **kūnu.**

Taigi, turime *realiųjų skaičių kūną* **R** ir *racionaliųjų skaičių kūną* **Q**. Atkreipkime dėmesį į tai, kad sveikųjų skaičių aibė **Z** nėra kūnas, nes joje neišpildyta savybė *S7*.