**5 paskaita (2002 10 04).** *Keitiniai.*

Tegu $\pi$ yra aibės $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ kėlinys $(v_1, v_2, ..., v_n)$. Tuo pačiu žymeniu $\pi$ žymėsime ir funkciją, kurią vadinsime **keitiniu**

$$\pi : N_n \to N_n,$$
$$\pi(1) = v_1, \pi(2) = v_2, ..., \pi(n) = v_n.$$

Žinome, kad keitiniai yra abipus vienareikšmės funkcijos ir jų yra $n!$ . Visų aibės $N_n$ keitinių aibę žymėsime $S_n$.

Pateiksime keitinių reiškimo būdus.

1. Keitinio, kaip funkcijos apibrėžtos baigtinėje aibėje, reiškimas lentele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ v_1 & v_2 & ... & v_n \end{pmatrix}.$$

2. Reiškimas *grafu*. Grafas sudarytas iš viršūnių $i$ ir orientuotų briaunų $\langle i, \pi(i) \rangle$ , $1 \leq i \leq n$ .

Pavyzdys. $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 5 & & \longleftarrow & & 3 \end{array} \quad 2 \longleftrightarrow 4 \quad 6 \; 7$$

3. Reiškimas nepriklausomais ciklais.

Tegu $i \in N_n$ . Tada turime aibės $N_n$ elementų seką

$$i, \pi(i), \pi^2(i) = \pi(\pi(i)), ..., \pi^{k-1}(i), \pi^k(i) = i.$$

Gauname $k$ ilgio ciklą $\left(i, \pi(i), \pi^2(i) = \pi(\pi(i)), ..., \pi^{k-1}(i)\right)$.

Jeigu $k = n$ , tai visi aibės $N_n$ elementai yra šiame cikle. Kitu atveju, egzistuoja toks $j \notin \left(i, \pi(i), \pi^2(i) = \pi(\pi(i)), ..., \pi^{k-1}(i)\right)$ , kuriam konstruojame savo ciklą:

$$\left(j, \pi(j), \pi^2(j) = \pi(\pi(j)), ..., \pi^{l-1}(j)\right) .$$

Skirtinguose cikluose yra skirtingi elementai. Jeigu būtų kitaip, tai atsirastų tokie $r$ ir $s$, kad $\pi^r(j) = \pi^s(i)$ ir $\pi^{r+1}(j) = \pi^{s+1}(i), \ldots, j = \pi^l(j) = \pi^{s+(l-r)}(i)$, o tada elementas $j$ priklausytų pirmąjam ciklui, o tai prieštarautų sąlygai.

Tokiu būdu, visi aibės $N_n$ elementai suskyla keitinio $\pi$ atžvilgiu į nepriklausomus ciklus, o pats keitinys $\pi$ reiškiamas nepriklausomų ciklų "sandauga"( vadinama dar *kanoniniu keitinio* $\pi$ *skaidiniu*):

$$\left(i, \pi(i), \pi^2(i), ..., \pi^{k-1}(i)\right)\left(j, \pi(j), \pi^2(j), ..., \pi^{l-1}(j)\right)\cdots.$$

Parodėme, kad bet kurį keitinį galima užrašyti poromis nepriklausomų ciklų "sandauga". Šis skaidinys yra vienintėlis nepriklausomų ciklų išsidėstymo tikslumu.

Paaiškinsime "sandaugos" sąvoką.

**Apibrėžimas.** *Tegu* $\pi$ , $\rho$ *- keitiniai aibėje* $V$*. Keitinių sandauga* $\sigma = \pi \circ \rho$ *vadinsime keitinį, apibrėžtą lygybe*

$$\sigma(i) = \rho(\pi(i))\ ,\ \forall v_i \in N_n.$$

Pastebėsime, kad taip apibrėžta sandauga yra funkcijų kompozicija. Ji nėra komutatyvi, t.y. ne visada $\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$.

**Pavyzdys.** Kai $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, o $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tai $\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \rho \circ \pi$ .

Pastebėsime. kad keitinio $\pi$ kanoniniame skaidinyje esantys nepriklausomi ciklai komutuoja poromis.

Keitinių sandauga aibėje $S_n$ pasižymi savybėmis:

S1. *Operacijos korektiškumas*: jei $\pi, \rho \in S_n$ , tai $\pi \circ \rho \in S_n$ .
S2. *Asociatyvumas*: $(\pi \circ \rho) \circ \tau = \pi \circ (\rho \circ \tau)$.
$((\pi \circ \rho) \circ \tau)(i) = \tau((\pi \circ \rho)(i)) = \tau(\rho(\pi(i))) = (\rho \circ \tau)(\pi(i))$
$= (\pi \circ (\rho \circ \tau))(i)$.

S3. *Neutralaus elemento egzistavimas* : id$(i) = i$ , $\forall i \in N_n$ , todėl id$\circ\pi = \pi\circ$id$= \pi$ , su visais $\pi \in S_n$.

4) *Atvirkštinio elemento egzistavimas*: jei $\pi(i) = v_i$ , su visais $i \in N_n$,tai keitinys $\rho(v_i) = i$, su visais $i \in N_n$, vaidina veiksmo $\circ$ atžvilgiu atvirkštinio elemento vaidmenį:

$$\pi \circ \rho = \rho \circ \pi = \mathrm{id}.$$

**Apibrėžimas.** *Ciklas $(i, j)$ vadinamas* ***transpozicija.***

**Teiginys.** *Kai $n \geq 2$, tai bet kurį keitinį iš $S_n$ galima užrašyti transpozicijų sandauga.*

**Įrodymas.** Šį teiginį pakanka įrodyti $k$ ilgio ciklui.

Kai $k = 1$, tai $(i) = (i, j) \circ (i, j)$ .

Kai $k = 2$, tai $(i, j) = (i, j)$ ,

o kai $k \geq 3$, tai $(1, 2, ..., k) = (1, 2) \circ (1, 3) \circ \cdots \circ (1, k)$. Sandaugoje yra $k - 1$ transpozicija.

**Įrodyta.**

Pastebėsime, kad keitinio reiškimas transpozicijų sandauga yra nevienareikšmiškas.

Pavyzdžiui,

$$(i, j) = (i, j) \circ (j, i) \circ (j, i) .$$

Pastovus dydis šiame reiškime vis dėlto yra: tai transpozicijų skaičiaus dalybos iš 2 liekana , t.y. kiekviename keitinio reiškime transpozicijomis pastarųjų skaičius yra arba visada lyginis, arba visada nelyginis..

**Apibrėžimas.** *Tegu $\pi \in S_n$. Pora $(i, j)$, kai $i < j$, bet $\pi(i) > \pi(j)$ vadinama keitinio $\pi$* ***inversija.***

*$\pi$ vadinamas lyginiu keitiniu, jeigu $\pi$ inversijų skaičius yra lyginis.*

*$\pi$ vadinamas nelyginiu keitiniu, jeigu $\pi$ inversijų skaičius yra nelyginis.*

Keitinio $\pi$ inversijų skaičių žymėsime $|\pi|$, o ženklą sign$\pi = (-1)^{|\pi|}$ .

Pastebėsime, kad tapatusis keitinys id yra lyginis. Jei $\pi-$ lyginis, tai sign$\pi = 1$, jei $\pi-$ nelyginis, tai sign$\pi = -1$.

**Teiginys.** *Skaičius* $|\pi \circ (a,b)| - |\pi|$ *ya nelyginis su visomis transpozicijomis* $(a,b)$.

**Įrodymas.**
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & ... & k & k+1 & k+2 & ... & k+l+1 & k+l+2 & k+l+3 & ... & n \\ a_1 & ... & a_k & a & b_1 & ... & b_l & b & c_1 & ... & c_m \end{pmatrix}$,
$\pi \circ (a,b) = \begin{pmatrix} 1 & ... & k & k+1 & k+2 & ... & k+l+1 & k+l+2 & k+l+3 & ... & n \\ a_1 & ... & a_k & b & b_1 & ... & b_l & a & c_1 & ... & c_m \end{pmatrix}$.
Pažymėkime:

$$\begin{gathered} p_a = |\{a_1, ..., a_k | a_i > a\}| \ , \ q_a = |\{a_1, ..., a_k | a_i > b\}| \\ p_b = |\{b_1, ..., b_l | b_i > a\}| \ , \ q_b = |\{b_1, ..., b_l | b_i > b\}| \\ p_c = |\{c_1, ..., c_m | c_i > a\}| \ , \ q_c = |\{c_1, ..., c_m | c_i > b\}| \, . \end{gathered}$$

Tegu skaičius $r$ yra keitinio

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & k & k+2 & ... & k+l+1 & k+l+3 & ... & n \\ a_1 & ... & a_k & b_1 & ... & b_l & c_1 & ... & c_m \end{pmatrix}$$

inversijų skaičius.
Tada , kai $a < b$ turime

$$\begin{gathered} |\pi| = p_a + (l - p_b) + (m - p_c) + q_a + q_b + (m - q_c) + r, \\ |\pi \circ (a,b)| = p_a + p_b + (m - p_c) + q_a + (l - q_b) + (m - q_c) + 1 + r. \end{gathered}$$

Todėl

$$|\pi| - |\pi \circ (a,b)| = 2\,(q_b - p_b) + 1$$

yra nelyginis skaičius.
Atvejis $a > b$ nagrinėjamas analogiškai.
**Įrodyta** .

Turime, kad $\mathrm{sign}(\mathrm{id}) = 1$ ir $\mathrm{sign}((a,b)) = -1$ .

**Teiginys.** *Transpozicijų skaičius keitinio $\pi$ reiškime transpozicijomis yra arba visada lyginis, arba visada nelyginis .*

**Įrodymas.** Jeigu turime du keitinio $\pi$ reiškimus transpozicijų sandauga :

$$\pi = \sigma_1 \cdots \sigma_k = \tau_1 \cdots \tau_l \ ,$$

tai

$$\mathrm{sign}\pi = \mathrm{sign}(\sigma_1 \cdots \sigma_k) = \mathrm{sign}(\tau_1 \cdots \tau_l)$$

ir

$$\mathrm{sign}\pi = (-1)^k = (-1)^l \Longrightarrow (-1)^{k-l} = 1 \Longrightarrow \text{skaičius } k-l \text{ lyginis} \Longrightarrow \text{ skaičiai } k, l$$
arba abu lyginiai, raba abu nelyginiai.

**Įrodyta**.

**Išvados.**

1. *Keitinys yra lyginis tada ir tik tada, kai jis yra lyginio skaičiaus transpozicijų sandauga.*
2. *Keitinys yra nelyginis tada ir tik tada, kai jis yra nelyginio skaičiaus transpozicijų sandauga.*
3. *k-ciklas yra lyginis tada ir tik tada, kai k yra nelyginis ir atvirkščiai.*
4. (lyginis) $\circ$ (lyginis) = (lyginis) .
(nelyginis) $\circ$ (nelyginis) = (lyginis) .
(nelyginis) $\circ$ (lyginis) = (nelyginis) .
5. $\mathrm{sign}(\pi \circ \rho) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \mathrm{sign}(\rho)$ .

Lyginių keitinų aibę žymėsime $A_n$ ir vadina **alternuojančia keitinių aibe**.

**Teiginys.** *Lyginių ir nelyginių keitinių yra po lygiai* $\dfrac{n!}{2}$ .

**Įrodymas**. Nagrinėjama alternuojanti keitinių aibė $A_n$. Apibrėžiama aibė

$$U_{(a,b)} = \{\pi \in S_n | \pi = \sigma \circ (a, b) \, , \sigma \in A_n\} \subseteq S_n - A_n.$$

Tegu $|A_n| = m_1$ , $|S_n - A_n| = m_2$. Tada aibės $U_{(a,b)}$ visi elementai skirtingi:
$\sigma_1 \circ (a, b) = \sigma_2 \circ (a, b) \Longleftrightarrow \sigma_1 \circ (a, b) \circ (a, b) = \sigma_2 \circ (a, b) \circ (a, b) \Longleftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.
Taigi, $\left|U_{(a,b)}\right| = |A_n| = m_1 \leq m_2$.

Analogiškai, tegu turime aibę

$$V_{(a,b)} = \{\pi \in S_n | \pi = \rho \circ (a,b), \rho \in S_n - A_n\} \subseteq A_n.$$

Kaip ir aibės $U_{(a,b)}$ taip ir aibės $V_{(a,b)}$ visi elementai skirtingi.
Tada $\left|V_{(a,b)}\right| = |S_n - A_n| = m_2 \leq m_1$.
Taigi, $m_1 = m_2 = \dfrac{n!}{2}$ .
**Įrodyta**.