3 paskaita(2002 09 20): *Tiesės padėtis koordintinių ašių atžvilgiu. Kampas tarp tiesių. Tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygos.Taško atstumas iki tiesės.*

Sakykime $ax + by + c = 0$ yra tiesės t lygtis. Išnagrinėsime atskirus tiesės t padėties ašių x ir y atžvilgiu.

1) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $b \neq 0$. Tada tiesės t lygtis yra $y = -\frac{c}{b}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti x ašiai.

2) $a \neq 0, \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $x = -\frac{c}{a}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti y ašiai.

3) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $ax + by = 0$. Šiuo atveju tiesė t eina per koordinačių pradžią.

4) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Tada tiesės t lygtis ekvivalenti lygčiai $\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y = 1$ ir jeigu $\alpha = \frac{-c}{a}, \beta = \frac{-c}{b}$, lygčiai $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

Tai **ašinė tiesės lygtis.**

Matome, kad taškai $(\alpha, 0)$ ir $(0, \beta)$ yra koordintinių ašių taškai, per kuriuos eina tiesė t.

Apibrėžimas. *Tiesės teigiama kryptimi vadiname tokia kryptį, kuria judėdant didėja taško ordinatė.*

Apibrėžimas. *Kampu φ tarp tiesių t_1 ir t_2 vadinsime tokį mažiausią neneigiamą kampą, kurio absoliuti reikšmė $< \pi$ ir kuriuo pasukus tiesę t_1 tiesės t_2 link, sutaps tiesių t_1 ir t_2 teigiamos kryptys.*

Rasime kampą tarp dviejų tiesių t_1 ir t_2, nelygiagrečių y ašiai. Tokių tiesių lygtis galima išreikšti y atžvilgiu:

$$y = k_1 x + l_1$$
$$y = k_2 x + l_2,$$

čia k_i- tiesės t_i krypties koeficientas ($k_i = \mathrm{tg}\alpha_i$, α_i- kampas tarp x ašies ir tiesės t_i), $i = 1, 2$;

l_i - atstumas nuo koordinačių pradžios iki tiesės t_i susikirtimo su y ašimi taško. $i = 1, 2$.

Tegu $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Tada ieškomasis kampas yra lygus $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$. Tada

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Kampas φ parenkamas taip, kad galiotų $0 \leq \varphi < \pi$.

Pastaba. Jeigu viena iš tiesių yra lygiagreti Oy ašiai, o kita su Ox ašimi sudaro kampą α, tai kampas tarp tiesių β apibrėžiamas taip:

$$\beta = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \alpha, \text{ jei } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha - \frac{\pi}{2}, \text{ jei } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{array} \right. .$$

Tegu dviejų tiesių t_1 ir t_2 lygtys yra

$$\begin{array}{c} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{array}$$

arba (jeigu jos nelygiagrečios y ašiai)

$$\begin{array}{c} y = k_1x + l_1 \\ y = k_2x + l_2, \end{array}$$

čia $k_i = -\frac{a_i}{b_i}, l_i = -\frac{c_i}{b_i}, i = 1, 2$.

Teorema 1. *Tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios arba sutampa tada ir tik tada, kada*

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0.$$

Teorema 2. *Tiesės t_1 ir t_2 yra statmenos tada ir tik tada, kada*

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Teoremos 1 įrodymas.

Įrodysime teiginį iš kairės į dešinę.

Nagrinėsime du galimus atvejus.

1) Tegu tiesės t_1 ir t_2 lygiagrečios y ašiai. Tada $b_1 = b_2 = 0$ ir $a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2 = 0$.

2) Tegu tiesės t_1 ir t_2 lygiagrečios, bet nelygiagrečios y ašiai. Tada
$0 = \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$, čia $\varphi (= 0) -$ kampas tarp t_1 ir t_2.
ir todėl $k_1 - k_2 = 0$, arba $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$.

Įrodysime teiginį iš dešinės į kairę.

Nagrinėkime keturis atvejus atvejus.

1) $b_1 \neq 0, b_2 = 0$. Tada $a_2 = b_2 = 0$. Bet tai negalima, nes prieštarauja sąlygai $a_2^2 + b_2^2 > 0$.

2) $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0.3$ Tada turime

$$-\tfrac{a_1}{b_1} = -\tfrac{a_2}{b_2} \text{ arba } k_1 = k_2,$$
$$\mathrm{tg} a_1 = \mathrm{tg}\alpha_2$$

t.y. tiesės su x ašimi sudaro vienodus kampus. O tai įmanoma tik tada, kai tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios arba sutampa.

3) $b_1 = 0, b_2 \neq 0$. Tada $a_1 = b_1 = 0$. Bet tai negalima, nes prieštarauja sąlygai $a_1^2 + b_1^2 > 0$.

4) $b_1 = b_2 = 0$. Tada $a_1 \neq 0$ ir abi tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios y ašiai, todėl ir $t_1 \| t_2$.

Įrodyta.

Teoremos 2 įrodymas.

Įrodysime teiginį iš kairės į dešinę.

Nagrinėsime du atvejus.

1) Tegu tiesė t_1 lygiagreti y ašiai, t.y. $b_1 = 0$. Tada tiesė t_2 turi būti lygiagreti x ašiai, t.y. $a_2 = 0$. Todėl turime $a_1 \cdot 0 + 0 \cdot b_2 = 0$.

2) Tegu tiesės t_1 ir t_2 statmenos ir nė viena iš jų nelygiagreti y ašiai. Tada
$\infty = \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$, čia $\varphi (= \frac{\pi}{2}) -$ kampas tarp t_1 ir t_2.

Todėl $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, arba $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Įrodysime teiginį iš dešinės į kairę.

Nagrinėkime tris atvejus.

1) $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Tada, padalijus lygybę $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ iš b_1b_2, turėsime

$$1 + \left(-\tfrac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(-\tfrac{a_2}{b_2}\right) = 0$$

arba $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ ir $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} = \dfrac{k_1 - k_2}{0} = \infty.$

t.y. tiesės statmenos.

2) $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$. Tada $a_2 \neq 0$ (turi būti išpildyta sąlyga $a_2^2 + b_2^2 > 0$) ir būtinai $a_1 = 0$. Todėl tiesė t_1 yra lygiagreti x ašiai($a_1 = 0$), o tiesė t_2 yra lygiagreti y ašiai($b_2 = 0$). Taigi $t_1 \perp t_2$.

3) $b_1 = 0$. Tada $a_1 \neq 0$ (turi būti išpildyta sąlyga $a_1^2 + b_1^2 > 0$) ir būtinai $a_2 = 0$. Todėl tiesė t_1 yra lygiagreti y ašiai, o tiesė t_2 yra lygiagreti x ašiai. Taigi $t_1 \perp t_2$.

Įrodyta.

Rasime taško atstumo iki tiesės formulę.

Teorema. *Taško $M(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės $t : ax + by + c = 0$ yra lygus*

$$\frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Įrodymas. Nesunku matyti, kad tiesė $t_\perp$

$$\begin{gathered} b(x - m_1) - a(y - m_2) = 0 \\ bx - ay + am_2 - bm_1 = 0 \end{gathered}$$

yra statmena tiesei t (žr. teoremos 2 sąlygą). Tegu $N(n_1, n_2)-$ tiesių t ir $t_\perp$ susikirtimo taškas.

Aišku, kad taško $M(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės t yra atkarpos MN ilgis:

$$MN = \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2}.$$

Taškas N yra abiejose tiesėse t ir $t_{\perp}$, todėl

$$\begin{gathered} an_1 + bn_2 + c = 0 \\ b\,(n_1 - m_1) - a\,(n_2 - m_2) = 0 \end{gathered}$$

Turime

$$am_1 + bm_2 + c = am_1 + bm_2 - (an_1 + bn_2) = a\,(m_1 - n_1) + b\,(m_2 - n_2)\,.$$

Nagrinėkime sistemą

$$\left\{ \begin{array}{c} b\,(n_1 - m_1) - a\,(n_2 - m_2) = 0 \\ am_1 + bm_2 + c = a\,(m_1 - n_1) + b\,(m_2 - n_2) \end{array} \right. .$$

Pakėlę šios sistemos abi lygtis kvadratu ir poto sudėję turėsime

$$(am_1 + bm_2 + c)^2 = (a^2 + b^2)\left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2\right)$$

arba

$$\begin{gathered} |am_1 + bm_2 + c| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{\left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2\right)} \\ |am_1 + bm_2 + c| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot MN \\ MN = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{gathered}$$

Įrodyta.

Priedas. *Vektorinės tiesės lygtys.*

Prisiminkime vektorius. Tegu xy plokštumos vektorius $\vec{v} = (X, Y)$ su teigiamomis koordinačių ašimis Ox ir Oy sudaro kampus α ir β. Šių kampų kosinusai $\cos\alpha, \cos\beta$ vadinami vektoriaus $\vec{v}$ **krypties kosinusais**. Tada teisingos šios lygybės:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\ ;\ \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

beto

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Aptarkime kai kuriuos tiesės lygties pavidalus.

1. *Tiesės t, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}\ (a, b)$, lygtis.*

Tegu $B\,(x, y)-$ bet kutis tiesės t taškas. Tada vektoriai $\vec{n}\ (a, b)$ ir $\vec{AB}$ $(x - x_0, y - y_0)$ yra statmeni:

$$\vec{n}\ (a, b) \cdot \vec{AB}\ (x - x_0, y - y_0) = 0$$
$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0.$$

Tai ir yra ieškomoji lygtis, o vektorius $\vec{n}$ vadinamas tiesės t **normalės vektoriumi**.

2. *Kanoninė tiesės t lygtis.*

Tegu $A\,(x_1, y_1)$ ir $B\,(x_2, y_2)-$ du tiesės t taškai. Žinome, kad tiesės t lygtis tada yra

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Vektoriai $\vec{AB}\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ir $\vec{BA}\ (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ yra lygiagretūs tiesei t. Išrinkime iš jų tą, kurio ordinatė teigiama ir pažymėkime jį $(l, m) = \vec{s}$ (jeigu $y_1 = y_2$, tai parenkamas tas, kurio abscisė teigiama). Vektorius $\vec{s}$ vadinamas tiesės t **krypties vektoriumi** ir lygtis

$$\frac{y-y_1}{m}=\frac{x-x_1}{l}$$

kanonine tiesės t lygtimi.

3. *Parametrinė tiesės t lygtis.*

Iš kanoninės tiesės t lygties turime, kad

$$\frac{y-y_1}{m}=\frac{x-x_1}{l}=t$$

ir gauname **parametrinę tiesės t lygtį**:

$$\begin{aligned} x &= l\cdot t+x_1 \\ y &= m\cdot t+y_1, \end{aligned}$$

čia $t\in\mathbf{R}$.

4. *Normalioji tiesės $t: ax+by+c=0$ lygtis.*

Padauginę panariui bendrąją tiesės t lygtį iš $\operatorname{sign}(-c)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

čia $\operatorname{sign}(c)=\left[\begin{array}{l} 1,\ \text{jei } c\geq 0 \\ -1,\ \text{jei } c<0 \end{array}\right.$ ir pažymėję

$\cos\alpha=\operatorname{sign}(-c)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta=\operatorname{sign}(-c)\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $-p=\operatorname{sign}(-c)\cdot\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

gausime normaliąją tiesės lygtį:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0.$$

Teigiamo skaičiaus p reikšmė - tai koordinačių pradžios atstumas iki tiesės, o $\vec{n_0}\,(\cos\alpha,\cos\beta)$ – **vienetinis normalės vektorius**.

5. *Vektorinė tiesės t lygtis.*

Tegu tiesė t eina per tašką $A\,(x_0,y_0)$ ir statmena normalės vektoriui $\vec{n}$. Tegu $B\,(x,y)$ - bet kuris tiesės taškas ir vektoriai $\vec{r}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{r_0}=\overrightarrow{OA}$. Tada vektoriai $\vec{r}-\overrightarrow{r_0}$ ir $\vec{n}$ - statmeni:

$$\left(\vec{r}-\overrightarrow{r_0}\right)\cdot\vec{n}=0.$$

Tai ir yra **vektorinė tiesės t lygtis**.

Pastebėsime, kad vietoje $\vec{n}$ paėmus vienetinį normalės vektorių $\vec{n_0}$ turėsime:

$$\vec{r} \cdot \vec{n_0} = p,$$

čia $p-$ koordinačių pradžios atstumas iki tiesės.

Pastaba. Jeigu tiesė $t : \left(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \vec{n} = 0$ yra lygiagreti vektoriui $\vec{s} = (l, m)$, tai vektoriai $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ ir $\vec{s}$ kolinearūs, t.y.

$$\begin{gathered} \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \vec{s}\, t \\ \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}\, t,\ t \in \mathbf{R}. \end{gathered}$$

Gavome *tiesės, lygiagrečios vektoriui* $\vec{s}$, *vektorinę lygtį.*

Norint iš tiesės vektorinių lygčių gauti koordinatines lygtis, reikia atlikti šiuos pakeitimus:

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \longrightarrow & x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \\ \vec{r_0} & \longrightarrow & x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} \\ \vec{n} & \longrightarrow & a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \\ \vec{n_0} & \longrightarrow & \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} \\ \vec{s} & \longrightarrow & l\,\vec{i} + m\,\vec{j} \end{array}.$$

Norint iš tiesės koordiatinių lygčių gauti vektorines lygtis, reikia atlikti šiuos pakeitimus:

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \vec{r} \cdot \vec{i} \\ y & \longrightarrow & \vec{r} \cdot \vec{j} \\ a & \longrightarrow & \vec{n} \cdot \vec{i} \\ b & \longrightarrow & \vec{n} \cdot \vec{j} \\ \cos\alpha & \longrightarrow & \vec{n_0} \cdot \vec{i} \\ \cos\beta & \longrightarrow & \vec{n_0} \cdot \vec{j} \\ l & \longrightarrow & \vec{s} \cdot \vec{i} \\ m & \longrightarrow & \vec{s} \cdot \vec{j} \end{array}.$$