2 paskaita(2002 09 13): *Dekarto koordinačių sistema.Kreivės lygties savoka. Kreivių susikirtimo taškai. Bendroji tiesės lygtis* $ax+by+c=0$ *su įrodymu. Dviejų tiesių sankirtos taškai.*

Plokštuma xy, tai plokštuma, kurioje pravestos dvi statmenos viena kitai tiesės Ox ir Oy, susikertančios taške O. Taškas O dalija kiekvieną iš šių tiesių į du spindulius: vieną iš jų kiekvienoje tiesėje vadiname teigiama kryptimi, kitą - neigiama.

Dekarto koordinačių sistema, tai xy plokštuma, kurioje su kiekviena skaičių pora x, y galima vienareikšmiškai susieti plokštumos xy tašką A, kurio abscisė yra x, o ordinatė - y.

Tegu dabar xy plokštumoje yra kreivė γ. Sakysime, kad lygtis $f(x,y)=0$ yra duotos *kreivės lygtis*, jeigu 1) visų kreivės γ takšų koordinatėsx ir y tenkina šią lygtį ir 2) skaičių pora x, y, tenkinanti lygtį $f(x,y)=0$, yra kreivės γ taško koordinatės.

Tegu plokštumoje xy duotos dvi kreivės:

kreivė γ_1 ir jos lygtis $f_1(x,y)=0$;

kreivė γ_2 ir jos lygtis $f_2(x,y)=0$.

Tegu $A(x,y)$ yra kreivių γ_1 ir γ_2 susikirtimo taškas. Tada taško koordinatės tenkina tiek lygtį $f_1(x,y)=0$, tiek lygtį $f_2(x,y)=0$, t.y. skaičių x, y pora yra sistemos $\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$ sprendinys. Akivaizdu, kad teisingas ir atvirkščias teiginys: bet kuris sistemos sprendinys x, y atitinka kreivių susikirtimo tašką A, kurio koordinatės yra x, y (įrodykite!).

Aptarsime dabar paprasčiausią kreivės pavyzdį - tiesę.

Tiesioginė teorema. *Bet kurios tiesės* t *lygtis yra* $ax+by+c=0$, *čia* $a, b, c-$ *skaičiai.*

Atvirkštinė teorema. *Tegu* a *ir* b *- du kartu nelygūs skaičiai* $(a^2+b^2>0)$. *Tada egzistuoja tokia tiesė, kurios lygtis yra* $ax+by+c=0$.

Tiesioginės teoremos įrodymas. Tegu $B(x_1, y_1)$ ir $C(x_2, y_2)$ - du simetriški tiesės t atžvilgiu taškai. Remiantis trikampių lygumo požymiais ir lygiašonio trikampio savybėmis turime ,kad taškas $A(x, y)$ yra tiesės t taškas tada ir tik tada, kada $BA = CA$ (įrodykite!). Todėl tiesės lygtis yra

$$(\mathbf{x} - x_1)^2 + (\mathbf{y} - y_1)^2 = (\mathbf{x} - x_2)^2 + (\mathbf{y} - y_2)^2 .$$

Suprastinus turėsime

$$2(x_2 - x_1)\mathbf{x} + 2(y_2 - y_1)\mathbf{y} + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0.$$

Įrodyta.

Atvirkštinės teoremos įrodymas.

Tegu plokštumos xy skirtingų taškų $M(m_1, m_2)$ ir $N(n_1, n_2)$ koordinatės yra lygties $ax + by + c = 0$ sprendiniai, o tiesės MN lygtis yra $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Tada taškų M ir N koordinatės yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

sprendiniai. Taškai M ir N yra skirtingi, todėl skiriasi nors viena šių taškų koordinatė, sakykime $m_1 \neq n_1$. Padauginkime (1) sistemos pirmąją lygtį iš b_1, o antrąją - iš $-b$ ir sudėkime gautas lygtis. Turėsime

$$(ab_1 - a_1b)\,x + (cb_1 - c_1b) = 0.$$

Šios lygties sprendiniais yra **du skirtingi** skaičiai m_1 ir n_1, todėl

$$(ab_1 - a_1b) = 0 \text{ ir } (cb_1 - c_1b) = 0 \text{ , t.y.}$$

sistemos (1) lygtys yra ekvivalentiškos ir tiesės

$$ax + by + c = 0 \text{ ir } a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

sutampa.

Įrodyta.

Dviejų tiesių susikirtimo taškai.

Tegu plokštumoje duotos dvi tiesės t_1 ir t_2, kurių lygtys atinkamai

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ ir } a_2x + b_2y = c_2.$$

Susikirtimo taškų koordinatės yra sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2)$$

sprendiniai. Surasime tiesių t_1 ir t_2 susikirtimo taškus. Tegu $A(x, y)$ yra tiesių t_1 ir t_2 susikirtimo taškas. Išreikškime taško A koordinates x ir y sistemos (2) koeficientais $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.

Padauginkime pirmąją lygtį iš b_2, antrąją - iš $-b_1$ ir sudėkimπe lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = c_1b_2 - c_2b_1. \ (3)$$

Padauginkime dabar pirmąją lygtį iš $-a_2$, antrąją - iš a_1 ir sudėkime lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$, tai

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)} \text{ ir } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

Šiuo atveju turime vieną susikirtimo tašką.

Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$, tai galimi du atvejai:

1)$c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ ir 2) $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$.

Pirmuoju atveju sistemoje (2) yra dvi ekvivalenčios lygtys, t.y. tiesės t_1 ir t_2 sutampa, t.y. yra be galo daug susikirtimo taškų.

Antruoju atveju sistema (2) neturi sprendinių, nes iš (3) turime, kad $0 = c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, t.y. tiesės t_1 ir t_2 neturi susikirtimo taškų ir todėl jos yra lygiagrečios: $t_1 \| t_2$.

Apibrėžimas. Lentelę $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ vadiname lygčių sistemos (2) *matrica.*

Apibrėžimas. Išraišką $a_1b_2 - a_2b_1$ vadiname matricos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ **determinantu** ir žymime:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Tuo atveju, kai tiesės kertasi viename taške, to taško koordinates galima užrašyti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ir } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Tokį sistemos (2) sprendinių pavidalą vadina *Cramer*'io formulėmis.