1. VEIKSMAI SU POERDVIAIS.

1.1. Poerdvių suma ir sankirta.

Apibrėžimas. Tegu U ir W yra vektorinės erdvės poerdviai.Tada jų *suma* $U + W$ vadinama aibė

$$U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}.$$

Poerdvių U ir W *sankirta* $U \cap W$ vadinama aibė

$$U \cap W = \{v \in V | v \in U \text{ ir } v \in W\}.$$

Aišku, kad ir poervių suma ir poerdvių sankirta yra poerdvis.

Pastaba. Poerdvių suma $U + W$ yra mažiausias V poerdvis, kuriame yra poerdviai U ir W.

Poervių sankirta $U \cap W$ yra didžiausias V poerdvis, esantis ir poedvyje U ir poerdvyje W.

Teorema. $\dim (U + W) + \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Įrodymas. Pažymėkime $U + W = P$ ir $U \cap W = R$; $\dim P = p$ ir $\dim R = r$.

Tegu $e_1, e_2, ..., e_r-$ poerdvio P bazė. Papildykime ją iki poerdvio U bazės ir poerdvio V bazės. Tegu $e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_s-$ U bazė, o $e_1, e_2, ..., e_r, e'_{r+1}, ..., e'_t-$ V bazė. Parodysime, kad vektorių sistema $e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_s, e'_{r+1}, ..., e'_t-$ poerdvio $U + V$ bazė. Reikia įrodyti, kad ši sistema yra generuojanti ir tiesiškai nepriklausoma sisitema.

Tegu $v-$ bet kuris poerdvio $P = U + V$ vektorius, t.y. $v = u + v$, čia $u \in U, v \in V$. Taigi, $u = a_1e_1 + \cdots + a_re_r + a_{r+1}e_{r+1} + \cdots + a_se_s$ ir $v = b_1e_1 + \cdots + b_re_r + b_{r+1}e'_{r+1} + \cdots + b_te'_t$. Turime $v = (a_1 + b_1)e_1 + \cdots + (a_r + b_r)e_r + a_{r+1}e_{r+1} + \cdots + a_se_s + b_{r+1}e'_{r+1} + \cdots + b_te'_t$ ir todėl vektoriai $e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_s, e'_{r+1}, ..., e'_t$ generuoja P.

Įrodysime sistemos tiesišką nepriklausomybę. Tegu $c_1e_1 + \cdots + c_re_r + c_{r+1}e_{r+1} + \cdots + c_se_s + c'_{r+1}e'_{r+1} + \cdots + c'_te'_t = 0$.

Tada $u = c_1e_1 + \cdots + c_re_r + c_{r+1}e_{r+1} + \cdots + c_se_s = -c'_{r+1}e'_{r+1} - \cdots - c'_te'_t \in R$ ir todėl $u = a_1e_1 + \cdots + a_re_r$.

Turime $a_1e_1 + \cdots + a_re_r = -c'_{r+1}e'_{r+1} - \cdots - c'_te'_t$,

$a_1e_1 + \cdots + a_re_r + c'_{r+1}e'_{r+1} + \cdots + c'_te'_t = 0$ ir $a_1 = \cdots = a_r = c'_{r+1} = \cdots = c'_t = 0$, nes vektoriai $e_1, e_2, ..., e_r, e'_{r+1}, ..., e'_t-$ tiesiškai nepriklausoma sistema($V-$ bazė). Taigi, $u = 0$.

Turime $c_1e_1+\cdots+c_re_r+c_{r+1}e_{r+1}+\cdots+c_se_s=0$ ir $c_1=\cdots=c_r=c_{r+1}=\cdots=c_s=0$, nes vektoriai $e_1,e_2,...,e_r,e_{r+1},...,e_s-$ tiesiškai nepriklausoma sistema($U-$ bazė).

Įrodėme sistemos tiesišką nepriklausomybę ir tuo pačiu tai ,kad ji yra $U+V$ bazė. Poerdvių U,V , P ir R turime lygybes:

$\dim U+V=s+t-r=\dim U+\dim V-\dim U\cap V$.

Įrodyta.

Paskutinioji teorema formuoja mūsų intuiciją apie poerdvių padėtį daugiamatėse vektorinėse erdvėse.

[.......]

1.2. Poerdvių tiesioginė suma ir faktorerdvė.

Apibrėžimas. Tegu U ir W yra vektorinės erdvės poerdviai.Tada jų *suma* $U+W$ vadinama *tiesiogine suma* $U\oplus W$,jeigu bet kurio $U+W$ vektoriaus reiškimas vektorių iš U ir W suma yra vienintėlis.

Paskutinis apibrėžimas ekvivalentiškas sąlygai: iš lygybės $u+w=0$,$u\in U, w\in W$ turime $u=0$ ir $w=0$.

Teiginys. Suma $U+W$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai $U\cap W=0$.

Įrodymas.[..........]

Teiginys. Suma $U+W$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai sumos bazė yra$U$ ir W bazių sąjunga.

Įrodymas.[..........]

Apibrėžimas. Tegu U_1,$U_2,...,U_k$ yra vektorinės erdvės poerdviai.Tada jų *suma* $U_1+U_2+\cdots+U_k$ vadinama *tiesiogine suma* $U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$,jeigu bet kurio $U_1+U_2+\cdots+U_k$ vektoriaus reiškimas vektorių iš U_1,$U_2,...,U_k$ suma yra vienintėlis.

Paskutinis apibrėžimas ekvivalentiškas sąlygai: iš lygybės $u_1+u_2+\cdots+u_k$, $u_i\in U_i$, turime $u_i=0$.

Paskutinįjį teiginį galima apibendrinti baigtiniai poerdvių sumai.

Teiginys. Suma $U_1+U_2+\cdots+U_n$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai

$$\forall i\ U_i\cap(U_1+\cdots U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_n)=0.$$

Įrodymas. Be įrodymo.

Teiginys. Suma $U_1+U_2+\cdots+U_k$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai sumos bazė yra U_1,$U_2,...,U_k$ bazių sąjunga.

Įrodymas. Be įrodymo.

Uždavinys. Tegu $V = U \oplus W$. Tada poerdvis U vadinamas poerdvio W *tiesioginiu papildiniu.*

Ar kievienam vektorinės erdvės poerdviui egzistuoja tiesioginis papildinys?

Jeigu egzistuoja tai ar vienintėlis šis tiesioginis papildinys?

Atsakymus pagrįskite.

Įrodyti paliekama studentams$\Box$

Apibrėžimas. Tegu U yra vektorinės erdvės V poerdvis. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ vadinama *tiesiškai nepriklausoma poerdvio U atžvil- giu sistema (t.n.mod U sistema)*, jeigu kai $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \in U$, tai $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Teiginys. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra t.n. mod U sistema tada ir tik tada, kai vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k, u_1, ..., u_m$, čia $u_1, ..., u_m$ - poerdvio U bazė, yra tiesiškai nepriklausoma.

Įrodymas.$\diamond$

Apibrėžimas. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ vadinama baze poerdvio U atžvilgiu (baze $modU$) jeigu bet kuris vektorius $v \in V$ yra lygus $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + u$, čia $u \in U$.

Teiginys. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra bazė poerdvio U atžvilgiu tada ir tik tada, kai vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k, u_1, ..., u_m$,čia $u_1, ..., u_m$ - poerdvio U bazė, yra vektorinės erdvės V bazė.

Įrodymas.$\diamond$

Pastaba. Jeigu $u_1, ..., u_m$ - poerdvio U bazė, tai bet kuri vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ papildanti šią sistemą iki vektorinės erdvės V bazės yra bazė poerdvio U atžvilgiu.

Apibrėžimas. Sakysime, kad vektoriai v_1 ir v_2 lygsta poerdvio U atžvilgiu, jeigu $v_1 - v_2 \in U$. Žymėsime $v_1 \equiv v_2\,(U)$.

Šio ekvivalentumo sąryšio dėka vektorinė erdvė V suskyla į ekvivalentumo klases, kurios savo ruoštu sudaro naują vektorinę erdvę, vadinamą *faktorerdve* ir žymima V/U . Faktorerdvės elementus žymėsime $\bar{v}$, čia v - klasės atstovas.

Teiginys. Jeigu vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra baze poerdvio U atžvilgiu, tai sistema $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_k$ yra V/U bazė.

Jeigu sistema $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_k$ yra V/U bazė, o $v_1 \in \bar{v}_1, v_2 \in \bar{v}_2, ..., v_n \in \bar{v}_n$, tai vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra baze poerdvio U atžvilgiu.

Įrodymas.[...........]