# 1. SIMETRINĖS IR ERMITO MATRICOS.

**Apibrėžimas.** *Kvadratinės matricos $A$ charakteristiniu polinomu vadinamas determinantas $\chi_A(t) = \det(A - tE)$. Charakteristinio polinomo $\chi_A(t)$ šaknys vadinamos tikrinėmis matricos $A$ reikšmėmis.*

Aišku, kad $\lambda-$ tikrinė matricos $A$ reikšmė tada ir tik tada, kai tiesinių lygčių sistema $A\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ turi nenulinį sprendinį. Šis sprendinių stulpelis $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ vadinamas *tikriniu matricos $A$ stulpeliu* atitinkančiu tikrinę reikšmę $\lambda$.

**Pastaba.** Kompleksinių skaičių kūnas $\mathbf{C}$ yra algebriškai uždaras, todėl su kiekviena kompleksine matrica $A$ polinomas $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ turi šaknį, t.y. matrica $A$ turi nors vieną tikrinę reikšmę $\lambda$, o homogeninė tiesinių lygčių sistema $(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ turi nenulinį sprendinį, t.y. matrica $A$ turi nors vieną nenulinį tikrinį stulpelį atitinkantį tikrinę reikšmę $\lambda$.

**Apibrėžimas.** *Realioji matrica $A$ vadinama simetrine matrica, jeigu $A^T = A$.*

*Kompleksinė matrica $A$ vadinama Ermito matrica, jeigu $A^T = \bar{A}$.*

Aišku, kad simetrinė matrica yra Ermito matrica.

**Teorema 4.** *Visos Ermito( simetrinės) matricos tikrinės reikšmės yra realieji skaičiai.*

**Įrodymas.** Tegu $A-$ Ermito matrica, $\lambda-$ tikrinė matricos $A$ reikšmė, o $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}-$ tikrinis stulpelis ( nenulinis)atitinkantis tikrinę reikšmę $\lambda$ :

$$(1) \qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Atlikime * veiksmą abiejose šios lygybės pusėse

$$\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}\right)^* = \left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}\right)^*$$

$. \left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) A^* = \left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) \bar{\lambda}$

(2) $\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) A = \left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) \bar{\lambda}.$

Padauginkime (1) iš kairės iš eilutės $\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right)$ :

$$\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) A \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \left(\bar{x}_1 x_1 + \cdots + \bar{x}_n x_n\right) = \lambda \left(|x_1|^2 + \cdots |x_n|^2\right).$$

Padauginkime (2) iš dešinės iš stulpelio $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ :

$$\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) A \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\right) \bar{\lambda} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \bar{\lambda} \left(\bar{x}_1 x_1 + \cdots + \bar{x}_n x_n\right) = \bar{\lambda} \left(|x_1|^2 + \cdots |x_n|^2\right).$$

Turime, $\lambda \left(|x_1|^2 + \cdots |x_n|^2\right) = \bar{\lambda} \left(|x_1|^2 + \cdots |x_n|^2\right) \Longleftrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$ , nes $|x_1|^2 + \cdots |x_n|^2 > 0$. Taigi , $\lambda-$ realusis skaičius. Įrodyta.

**Pastaba.** Polinomai, kurie yra Ermito arba simetrinių matricų charakteringieji polinomai, turi tik realiąsias šaknis.

Mums prireiks tokio teiginio:

**Lema.** *Jeigu $F-$ unitarioji( ortogonalioji) matrica, tai ir matrica* $\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right) -$ *unitarioji( ortogonalioji).*

**Įrodymas.** $\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right)^* \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F^*F \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & E_{n-1} \end{array}\right) = E_n.$

**Teorema 5.** *Tegu $A$ - Ermito ( atitinkamai, simetrinė ) matrica. Tada egzistuoja tokia unitarioji ( atitinkamai, ortogonalioji ) matrica $C$, kad $C^{-1}AC = C^*AC$ ( atitinkamai, $C^{-1}AC = C^TAC$ ) yra realioji įstrižaininė matrica. Įstrižainėje yra visos matricos $A$ tikrinės reikšmės, įskaitant kartotinumą.*

**Įrodymas**. Indukcija pagal maricos $A$ eilę $n$.

Tegu $A-$ Ermito matrica, $\lambda-$ tikrinė matricos $A$ reikšmė, o $\begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} -$ tikrinis <u>normuotas</u> stulpelis ( nenulinis)atitinkantis tikrinę reikšmę $\lambda$ :

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}, \ \bar{c}_1 c_1 + \cdots + \bar{c}_n c_n = 1.$$

Jeigu $C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$, tai $C_1^* C_1 = 1$ ir pagal *teoremą 4* stulpelį $C_1$ galima papildyti iki unitariosios matricos $D = (C_1|B) : D^*D = E_n$ .

Turime $D^*AD = D^*A(C_1|B) = D^*(AC_1|AB) = (D^*AC_1|D^*AB) =$

$$(D^*\lambda C_1|D^*AB) = (\lambda D^*C_1|D^*AB) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \\ 0 & Y \\ ... & \\ 0 & \end{array}\right),$$

nes $E_n = D^*D = D^*(C_1|B) = (D^*C_1|D^*B) \Longrightarrow D^*C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

Matrica $D^*AD-$ Ermito matrica:
$(D^*AD)^* = D^*A^*D^{**} = D^*AD.$
Tad turime
$D^*AD = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \underline{0...0} \\ 0 & \\ ... & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)$, čia $A_1^* = A_1$ , todėl pritaikę indukcijos prielaidą randame tokią unitariąją matricą $F$ , kad $F^*A_1F = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} -$ realioji diagonalinė matrica.

Pagal lemą matrica $C := D\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right) -$ unitarioji matrica ir

$$C^*AC = \left(D\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right)\right)^* AD\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F^* \end{array}\right) D^*AD \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \underline{0...0} \\ 0 & \\ ... & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ O & F \end{array}\right) =$$

$$\left( \begin{array}{c|c} \underline{\lambda} & \underline{O} \\ O & F^* A_1 F \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Įrodyta.

**Uždavinys.** Matricas $A$ ir $B$ vadinsime *panašiomis* jeigu egzistuoja tokia neišsigimusi matrica $C$, kad $B = C^{-1}AC$. Įrodykite, kad matricų panašumas yra ekvivalentumo sąryšis.

**Įrodyti paliekama studentams□**

Jeigu unitariosios( ortogonaliosios) matricos $C$ iš teoremos 5 stulpelius pažymė-

sime $X_1, X_2, ..., X_n$ , tai

$$A\ (X_1|X_2|...|X_n) = (X_1|X_2|...|X_n)\, [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$$
$$(AX_1|AX_2|...|AX_n) = (\lambda_1 X_1|\lambda_2 X_2|...|\lambda_n X_n),$$

čia $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - tikrinės matricos A reikšmės. Matome , kad stulpeliai $X_1, X_2, ..., X_n$ yra tikriniai stulpeliai atitinkantys tikrines reikšmes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Tiesa, kai matrica turi kartotines tikrines reikšmes, ne kiekvienas tikrinių stulpelių rinkinys yra poromis ortogonalieji stulpeliai.

**Uždavinys.** *Realiosios simetrinės matricos tikriniai vektoriai-stulpeliai, atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes, - ortogonalūs.*

**Įrodyti paliekama studentams□** *Patarimas.* Pasinaudoti ortogonaliųjų stulpelių $X$ ir $Y$ sąlyga: $X^T Y = Y^T X = O$. Tegu $\lambda_1$ ir $\lambda_2-$ dvi skirtingos simetrinės matricos $A$ tikrinės reikšmės: $AX_1 = \lambda_1 X_1, AX_2 = \lambda_2 X_2$. Nagrinėkite skaičių $a = X_2^T A X_1$ ir atkreipkite dėmesį į lygybę $X_2^T A = \lambda_2 X_2^T$.

**Pavyzdys**. Simetrinei matricai $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, tikriniai vektoriai:

$\left[-1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right], \left[4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ randame ortogonaliąją $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ , kad $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.