1. ORTOGONALIOSIOS IR UNITARIOSIOS MATRICOS.

Apibrėžimas.*Realioji eilutė* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *vadinama normuota, jeigu*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1.$$

Dvi eilutės $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ir* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *vadinamos ortogonaliomis jeigu* $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

Analogiškai apibrėžiami ortogonalūs stulpeliai.

Ortogonaliosios matricos - tai matricos, kurios tenkina kurią nors iš žemiau pateiktos teoremos sąlygų.

Teorema 1. *Tegu* C *- kvadratinė* $n \times n$ *matrica. Žemiau pateiktos sąlygos yra ekvivalentiškos.*

1) *C yra neišsigimusi matrica, kurios* $C^{-1} = C^T$.

2) $C \cdot C^T = E$.

3) $C^T \cdot C = E$.

4) *Matricos C eilutės yra normuotos ir poromis ortogonalios.*

5) *Matricos C stulpeliai yra normuoti ir poromis ortogonalūs.*

Įrodymas. Akivaizdžios yra šios implikacijos: $1 \Longrightarrow 2, 1 \Longrightarrow 3$. Ekvivalentumai $2 \Longleftrightarrow 4$ ir $3 \Longleftrightarrow 5$ išplaukia iš matricų sandaugos apibrėžimo. Belieka parodyti arba $2 \Longrightarrow 1$ arba $3 \Longrightarrow 1$.

Iš tikro: $C \cdot C^T = E \Longrightarrow \det\left(C \cdot C^T\right) = \det E \Longrightarrow \det C \cdot \det C^T = 1 \Longrightarrow \det C \neq 0$. Taigi, matrica C yra neišsigimusi ir todėl turi atvirkštinę. Todėl $C^{-1}\left(CC^T\right) = C^{-1} \Longrightarrow \left(C^{-1}C\right)C^T = C^{-1} \Longrightarrow C^T = C^{-1}$. $2 \Longrightarrow 1$ įrodyta.

Ortogonaliųjų matricų savybės.

1. *Ortogonaliųjų matricų sandauga yra ortogonali matrica.*
2. *Ortogonaliosios matricos atvirkštinė matrica yra ortogonalioji matrica.*
3. *Vienetinė matrica E yra ortogonalioji matrica.*
4. *Ortogonaliosios matricos determinantas yra lygus* ± 1.

Įrodymas.1. Tegu A ir B - ortogonaliosios matricos, t.y. $AA^T = E, A^TA = E, BB^T = E, B^TB = E$. Tada $(AB)(AB)^T = (AB)\left(B^TA^T\right) = A\left(BB^T\right)A^T = AEA^T = AA^T = E$.

2. Tegu A - ortogonalioji matrica, tada $A^T = A^{-1}$. Turime $A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T = A^T\left(A^T\right)^T = A^TA = E$.

3. $EE^T = EE = E$.

4. Tegu A - ortogonalioji matrica. Tada $\det AA^T = \det E \Longrightarrow \det A \det A^T = 1 \Longrightarrow (\det A)^2 = 1 \Longrightarrow \det A = \pm 1$.

Pastaba. Matricos $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinantas yra lygus 1 , bet matrica nėra ortogonali.

Apibrėžimas. *Ortogonalioji matrica* C *vadinama tikrine, jeigu* $\det C = 1$ *ir netikrine, jeigu* $\det C = -1$.

Analogiškai apibrėžiamos unitariosios matricos .

Apibrėžimas. *Kompleksinė eilutė* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *vadinama normuota, jeigu* $a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + \cdots + a_n\bar{a}_n = 1$.

Dvi eilutės $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ir* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *vadinamos ortogonaliomis jeigu* $\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b}_i = 0$.

Unitariosios matricos - tai matricos, kurios tenkina kurią nors iš žemiau pateiktos teoremos sąlygų.

Teorema 2. *Tegu* U *- kvadratinė* $n \times n$ *matrica. Žemiau pateiktos sąlygos yra ekvivalentiškos.*

1) U *yra neišsigimusi matrica, kurios* $U^{-1} = \overline{U^T}$.

2) $U \cdot \overline{U^T} = E$.

3) $\overline{U^T} \cdot U = E$.

4) *Matricos* U *eilutės yra normuotos ir poromis ortogonalios.*

5) *Matricos* U *stulpeliai yra normuoti ir poromis ortogonalūs.*

Įrodyti paliekama studentams.□

Unitariųjų matricų savybės.

1. *Unitariųjų matricų sandauga yra unitarioji matrica.*
2. *Unitariosios matricos atvirkštinė matrica yra unitarioji matrica.*
3. *Vienetinė matrica* E *yra unitarioji matrica.*
4. *Unitariosios matricos determinanto modulis yra lygus* 1.

Įrodyti paliekama studentams.□

Pavyzdys. Ortogonaliosios 2×2 matricos. Tegu $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - ortogonali matrica. Tada

(1) $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$,

(2) $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$,

(3) $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$.

Jeigu dviejų realiųjų skaičių kvadratų suma lygi vienetui, tai egzistuoja toks kampas φ, kad vieną iš šių skaičių galime reikšti $\cos\varphi$, o kitą - $\pm\sin\varphi$.

Taigi, tegu $a_{11} = \cos\varphi$, tada iš (1) turėsime, kad $a_{21} = \pm\sin\varphi$.

1 atvejis: $a_{21} = \sin\varphi$. Tada $a_{12} = \rho \cdot \sin\varphi$.

Iš (2) turime $\rho \sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi \cdot a_{22} = 0$,
t.y. $a_{22} = -\rho\cos\varphi$.
Iš (3) išplaukia $\rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = 1$, t.y. $\rho = \pm 1$.
Taip gauname dvi matricos C galimas išraiškas:
$C_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ ir $C_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
2 atvejis: $a_{21} = -\sin\varphi$.
Elgdamiesi kaip ir aukščiau, gauname dvi matricos C galimas išraiškas:
$C_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ir $C_4 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Kadangi $-\sin\varphi = \sin(2\pi - \varphi)$, o $\cos\varphi = \cos(2\pi-\varphi)$, tai matricos C_3 ir C_4 yra matricų C_1 ir C_2 atskiri atvejai.

Dabar pateiksime šių marticų geometrinę interpretaciją.

Plokštumos R^2 taškus (x, y) reikškime kompleksiniais skaičiais: $z = x + iy$. Šio skaičiaus daugyba iš skaičiaus $[1, \varphi] = \cos\varphi + i\sin\varphi$ geometriškai reiškia vektoriaus $\{x, y\}$ posūkį kampu φ. Tačiau

$$\begin{aligned} & u + iv = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(x+iy) \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} u = \cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y \\ v = \sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y \end{cases} (x, y, u, v \in R) \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Taigi, matrica C_2 atitinka posūkį kampu φ (matrica C_3 atitinka posūkį kampu $2\pi - \varphi$, t.y. kampu $-\varphi$.

Jeigu pirma kompleksinį skaičių $z = x + iy$ pakeisime jungtiniu $\bar{z} = x - iy$ (geometriškai - tai simetrinis atvaizdis $x-$ašies atžvilgiu), o poto padauginsime iš $[1, \varphi] = \cos\varphi + i\sin\varphi$ gausime

$$\begin{aligned} & u + iv = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\overline{(x+iy)} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} u = \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y \\ v = \sin\varphi\cdot x - \cos\varphi\cdot y \end{cases} (x, y, u, v \in R) \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Taigi matrica C_1 atitinka vektoriaus $\{x, y\}$ dviejų veiksmų seką: pirma, simetrišką atvaizdį $x-$ašies atžvilgiu, antra, posūkį kampu φ.

Kita teorema parodo kaip bet kurį normuotą stulpelį galima papildyti iki ortogonaliosios matricos.

Teorema 3. *Tegu C_1 - tokia kompleksinė (atitinkamai- realioji) matrica, kad*

$$C_1^* C_1 = E \text{ (atitinkamai },C_1^T C_1 = E \text{), čia } C_1^* = \overline{C_1^T} \ .$$

Tada egzistuoja tokia kompleksinė (atitinkamai- realioji) matrica X , kad matrica $(C_1 \mid X)$ yra unitarioji (atitinkamai - ortogonalioji) matrica.

Įrodymas. Tegu C_1- matrica iš teoremos teiginio turi $n-$ eilučių ir $m-$ stulpelių. Tegu $m < n$ (kai $m = n$ - matrica C_1 būtų ortogonali ir nieko nereiktų įrodynėti). Įrodysime, kad galime surasti tokį stulpelį D , kad

$(C_1|D)^* \, (C_1|D) = E_{m+1}.$

Turėtų būti

$(C_1|D)^* \, (C_1|D) = \begin{pmatrix} C_1^* \\ \hline D^* \end{pmatrix} (C_1|D) = \begin{pmatrix} C_1^* C_1 & C_1^* D \\ D^* C_1 & D^* D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & 1 \end{pmatrix}.$

Lygybė $C_1^* C_1 = E_m$ duota. Lygybė $C_1^* D = O-$ tai homogeninė m tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistema. Kadangi $m < n$ ši sistema pagal Kronekerio-Kapelio teoremą turi nenulinį sprendinių stulpelį $D' = \begin{pmatrix} d_1' \\ ... \\ d_n' \end{pmatrix} \neq O.$

Normuokime stulpelį D' : $D = \frac{1}{\sqrt{d}} D'$, čia $d = \bar{d}_1' d_1' + \cdots + \bar{d}_n' d_n' > 0.$

Turime: $C_1^* D = \sqrt{d} \cdot C^* D = O.$

$D^* C_1 = (C_1^* D)^* = O,$

$D^* D = \frac{1}{d} \left(\bar{d}_1' d_1' + \cdots + \bar{d}_n' d_n' \right) = 1.$

Pavyzdys. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}.$