1. OPERATORIAI VEKTPORINĖSE ERDVĖSE VIRŠ C.

1.1. Šakniniai poerdviai.

Pavyzdys.

Tegu operatoriaus $\mathcal{A} : \mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_4$ matrica standartinėje bazėje yra

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 7 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Operatoriaus charakteristinis polinomas yra

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x-1)^2 (x-2)^2,$$

Operatoriaus tikrinės reikšmės yra: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

$$\underline{\text{Šakninis poerdvis } \ker (A - 1 \cdot I)^2}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 7 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t_1 \\ t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker (A - I) = \left\langle \left(-\tfrac{3}{2}, 1, 0, 0 \right) \right\rangle.$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker (A - I)^2 = \left\langle \left(-\tfrac{3}{2}, 1, 0, 0 \right), (0, 1, 0, 0) \right\rangle \supset \ker (A - I).$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad

$$\ker (A - I)^3 = \ker (A - I)^2 .$$

Taigi, šakninis poerdvis atitinkantis tikrinę reikšmę 1, yra dvimatis poerdvis ir minimalusis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas šiame poerdvyje yra $f_1(x) = (x-1)^2$. Tikrinės reikšmės $\lambda_1 = 1$ aukštis yra lygus 2.

<u>Šakninis poerdvis $\ker(A - 2 \cdot I)$</u>

$$A-2I = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 7 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 5 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 5 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}t_1 + 6t_2 \end{pmatrix}$$

$$\ker (A - 2I) = \left\langle \left(-\tfrac{3}{2}, 1, 0, \tfrac{1}{2}\right), (0,0,1,6) \right\rangle .$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 5 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}t_1 + 6t_2 \end{pmatrix}$$

Matome, kad

$$\ker (A - 2I)^2 = \ker (A - 2I) .$$

Taigi, šakninis poerdvis atitinkantis tikrinę reikšmę 1, yra dvimatis poerdvis ir minimalusis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas šiame poerdvyje yra $f_1(x) = (x-2)$. Tikrinės reikšmės $\lambda_2 = 2$ aukštis yra lygus 1.

Visa vektorinė erdvė $\mathbf{R}_4$ yra savo šakninių poerdvių tiesioginė suma:

$$\mathbf{R}_4 = \ker (A - 1 \cdot I)^2 \oplus \ker (A - 2 \cdot I)$$

1.2. Matricos Jordano forma ir Jordano bazė.

Pavyzdys.

Tegu duota matrica A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -12 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 4 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Jos charakteristinis polinomas : $x^8 - 32x^7 + 448x^6 - 3584x^5 + 17920x^4 - 57344x^3 + 114688x^2 - 131072x + 65536 = (x-4)^8$

Matricos tikrinė reikšmė yra viena $\lambda = 4$, todėl visa vektorinė erdvė yra šakninis poerdvis.

Apibrėžiame matricą $B = A - 4I$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Nagrinėsime poerdvius $0 = \ker B^0 \subset \ker B \subset \ker B^2 \subset ...$ ir rasime jų bazes.

$\underline{\ker B}$

Sprendžiame lygčių sistemą $BX = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemos bendrasis sprendinys yra : $\begin{pmatrix} t_1 \\ -4t_2 \\ t_2 \\ -2t_4 \\ -2t_1 \\ -2t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, $t_i \in \mathbf{C}$.

Matome , kad $\dim \ker B = 4$. Poerdvio bazė yra vektoriai

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\ker B^2}$

Lygčių sistemos sprendimas $B^2X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemos bendrasis sprendinys yra : $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ -2t_1 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{pmatrix}, t_i \in \mathbf{C}.$

Matome , kad $\dim\ker B^2 = 7$. Poerdvio bazė yra

$$u_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_{25} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{26} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{27} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rasime vektorius ,kurie poerdvio $\ker B$ bazę $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$ papildo iki poerdvio $\ker B^2$ bazės.

Nagrinėsime matricos$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & x & y & z \end{pmatrix}$,
čia $x, y, z \in \{u_{2j}, j = 1, ..., 7\}$, rangą:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 5\ ;\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6\ ;$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 7.$$

Taigi vektoriai $u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – tiesiškai nepriklausomi $\ker B$ atžvilgiu.

$\underline{\ker B^3}$

Lygčių sistemos sprendimas $B^3X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemos bendrasis sprendinys yra : $\begin{pmatrix} t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_5 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, $t_i \in \mathbf{C}$.

Matome, kad $\dim \ker B^3 = 8$, taigi $\ker B^3 = V$.

Rasime vektorių, kuris poerdvio $\ker B^2$ bazę $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{22}, u_{23}, u_{24}$ papildo iki visos erdvės bazės.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8.$$

Taigi vektorius $u_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – tiesiškai nepriklausomas $\ker B^2$ atžvilgiu.

Turime Jordano bazės sudarymo lentelę:

$V = \ker B^3$	v_1				- bazė poerdvio $\ker B^2$ atžvilgiu
$\ker B^2$	Bv_1	v_2	v_3		- bazė poerdvio $\ker B$ atžvilgiu
$\ker B$	B^2v_1	Bv_2	Bv_3	v_4	- $\ker B$ bazė

$$v_1 = u_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ Bv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vektoriai v_2 ir v_3 turi papildyti sistemą, sudarytos iš poerdvio ker B kokios nors bazės(sakykime $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$) ir vektoriaus Bv_1, iki poerdvio ker B^2 bazės. Nagrinėsime matricą $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & Bv_1 \end{pmatrix}$ ir rasime vektorių iš u_{21}, u_{22}, u_{23}, kurį pašalinus, matricos rangas lieka maksimalus, t.y. lygus 7.

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 7.$$

Taigi $v_2 = u_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = u_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Turime

$$B^2v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \\ 32 \\ 0 \\ -4 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix}, Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 16 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}, Bv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -16 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Surasime v_4. Šis vektorius papildo tikrinių vektorių poerdvio vektorų sistemą B^2v_1, Bv_2, Bv_3 iki bazės.Vektoriaus v_4 ieškosime tarp poerdvio $\ker B$ bazinių vektorių $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 32 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 16 & 9 & -9 & 1 \\ -16 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 4, \text{ todėl } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matricos A Jordano matrica rastoje Jordano bazėje yra

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matricos A Jordano bazė:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \\ 32 \\ 0 \\ -4 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 16 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -16 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matricos Jordano forma..Pavyzdys.

Tegu duota matrica $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Matricos charakteristinis polinomas: $x^4-16x^3+96x^2-256x+256 = (x-4)^4$.

Matricos tikrinė reikšmė yra viena $\lambda = 4$.

Rasime matricos A Jordano formą, remdamiesi $j-$ osios eilės Jordano blokų skaičiaus formule

$$k_j = 2s_j - s_{j+1} - s_{j-1},$$

čia $s_i = \dim\ker\left(A-\lambda I\right)^i = n - \mathrm{rank}(A-\lambda I)^i$.

Turime
$\operatorname{rank}(A-4I)^0 = 4$, $\operatorname{rank}(A-4I)^1 = 1$, $\operatorname{rank}(A-4I)^2 = 0$,
todėl
$s_0 = 4-4 = 0$, $s_1 = 4-1 = 3$, $s_2 = 4-0 = 4$, ir $s_i = 4, i \geq 3$.
Tada

$$\begin{gathered}
k_1 = 2s_1 - s_2 - s_0 = 2, \\
k_2 = 2s_2 - s_3 - s_1 = 1, \\
k_3 = 2s_3 - s_4 - s_2 = 0, \\
k_i = 0 \text{ su visais } i \geq 4.
\end{gathered}$$

Gavome, kad matrica A turi *du* 1- osios eilės ir *vieną* 2- osios eilės Jordano blokus, atitinkančius tikrinę reikšmę 4.

Matricos A Jordano forma yra

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Operatoriaus matricos Frobeniuso-Žordano formos pavyzdys.

Tegu operatoriaus $\mathcal{A} : \mathbf{R}_8 \to \mathbf{R}_8$ matrica yra

$$A = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\
0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1
\end{pmatrix}.$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas yra lygus

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1.$$

Šio polinomo kanoninis skaidinys virš realiųjų skaičių kūno yra

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = (x^2 + x + 1)^4 .$$

Charakteristinis polinomas yra neredukuojamo polinomo x^2+x+1 laipsnis, todėl visa vektorinė erdvė $\mathbf{R}_8$ yra primarusis poerdvis.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas $f(x)$ yra charakteristinio polinomo daliklis, todėl

$$f(x) = \left(x^2+x+1\right)^s,$$

čia $1 \leq s \leq 4$. Rasime šį polinomą.

Norint rasti matricos A kanoninę Frobeniuso-Žordano formą, nebūtina ieškoti Frobeniuso-Žordano bazės. Pakanka suskaičiuoti sekoje

$$0 = \ker f^0(\mathcal{A}) \subset \ker f^1(\mathcal{A}) \subset \cdots \subset \ker f^s(\mathcal{A}) = \ker f^{s+1}(\mathcal{A})$$

esančių poerdvių dimensijas:

$$s_i = \dim\ker f^i(\mathcal{A}) = n - \mathrm{rank} f^i(A),$$

$i = 1, 2, ..., s$; $n = 8$

ir pasinaudoti $j-$ osios eilės Frobeniuso-Žordano blokų skaičiaus k_j formule:

$$k_j = \frac{2s_j - s_{j+1} - s_{j-1}}{d},$$

čia $d = \deg f(x) = 2$.

Maple pagalba turime

$s_0 = 0$;

$$\mathrm{rank}(A^2+A+I) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

ir $s_1 = 8 - \mathrm{rank}(A^2+A+I) = 8-2 = 6$;

$$\operatorname{rank}(A^2+A+I)^2 = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ir $s_2 = 8 - \operatorname{rank}(A^2+A+I)^2 = 8 - 0 = 8$.
Taigi $s_0 = 0, s_1 = 6, s_2 = 8, s_i = 8$ su visais $i \geq 3$. Tada

$$k_1 = \frac{2\cdot 6 - 8 - 0}{2} = 2,$$
$$k_2 = \frac{2\cdot 8 - 8 - 6}{2} = 1,$$
$$k_3 = \frac{2\cdot 8 - 8 - 8}{2} = 0.$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos Frobeniuso-Žordano formoje yra du pirmos ir vienas antros eilės Frobeniuso-Žordano blokai:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}.$$