9 paskaita

Kvadratinės formos.

Apibrėžimas. *Tegu K - kūnas, o $K[x]$ - polinomų žiedas virš kūno K. Žinome, kad šis polinomų žiedas yra komutatyvus, asociatyvus žiedas su vienetu. Šio žiedo pagrindu galima sukonstruoti polinomų žiedą $K[x][y] = K[x,y]$ virš $K[x]$. Tai polinomų su dviem kintamaisiais x ir y žiedas virš kūno K. Panašiai konstruojant galima apibrėžti polinomų su n kintamųjų $x_1, ...x_n$ žiedą $K[x_1, ..., x_n]$.*

Apibrėžimas. *Polinomas $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ vadinamas kvadratine forma, jeigu*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{array}{c} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_1x_n + \\ \cdots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{array},$$

kai $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vadinama kvadratinės formos f matrica.

Ši matrica yra simetrinė: $A^T = A$.

Jeigu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, tai kvadratinę formą f galima reikšti taip: $f = X^T A X$.

Apibrėžimas. *Tegu turime du kintamųjų rinkinius: $x_1, x_2, ..., x_n$ ir $y_1, y_2, ..., y_n$. Antrasis kintamųjų rinkinys vadinamas pirmojo tiesiniu keitiniu, jeigu $x_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n$ su visais $i = 1, 2, ..., n$.*

Turime, kad $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = CY$.

Matrica C vadinama kintamųjų keitimo matrica.

Atlikus minėtą kintamųjų keitinį kvadratinėje formoje f, turėsime kvadratinę formą g:

$g(y_1, y_2, ..., y_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T \left(C^T AC\right) Y$, čia $\left(C^T AC\right)$ - vėl simetrinė matrica:
$\left(C^T AC\right)^T = C^T A^T \left(C^T\right)^T = C^T A^T C = C^T AC$.

Apibrėžimas. *Keitinys, kurio keitimo matrica yra neišsigimusi, vadinamas neišsigimusiu.*

Teorema 6. *Su kiekviena kvadratine forma egzistuoja neišsigimęs toks keitinys, kad naujoji kvadratinė forma yra lygi*

$$c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \cdots + c_n y_n^2.$$

Šis kvadratinės formos pavidalas vadinamas *kanoniu pavidalu.*

Pastaba. Nuo šiol kalbėsime tik apie realiąją kvadratinę .

Lema. *Neišsigimusiu kintamųjų keitiniu* <u>*nenulinę*</u> *kvadratinę formą galima suvesti prie kvadratinės formos, kurios koeficientas prie pirmojo nežinomojo kvadrato nelygus nuliui.*

Įrodymas. Tegu $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Nagrinėsime kelis atvejus.

<u>1 atvejis.</u> Kai $a_{11} \neq 0$, tai nieko įrodineti nereikia.

<u>2 atvejis.</u> Kai egzistuoja toks i $(i \neq 1)$, kad $a_{ii} \neq 0$, tai atlikus keitinį

$$\begin{array}{lllllll} x_1 = & & & & y_i & & \\ x_2 = & & y_2 & & & & \\ x_3 = & & & y_3 & & & \\ \cdots & & & & & & \\ x_i = & y_1 & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ x_n = & & & & & & y_n \end{array}$$

gausime kvadratinę, kurios koeficientas $b_{11} \neq 0$.

<u>3 atvejis.</u> Kai $a_{ii} = 0$ su visais i, tai $\exists s, t$, kad $a_{st} \neq 0$. Pakeitę indeksaciją, galime pasiekti tai, kad $a_{12} \neq 0$. Atlikime kintamųjų keitinį:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Tada naujos kvadratinės formos matrica bus

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & O \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \\ a_{21} & a_{22} & * \\ & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & O \\ O & E \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} + a_{22} + a_{21} & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

ir todėl $a_{11} + a_{21} + a_{22} + a_{21} = 2a_{12} \neq 0$.

Įrodyta.

Teoremos 6 įrodymas. Tegu $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Įrodysime indukcijos pagal n būbu. Galimi keli atvejai.

1 atvejis. Jeigu $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, tai įrodinėti nieko nereikia.

2 atvejis. Jeigu $f(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$, tai pagal *lemą* kvadratinę formą f galima suvesti prie kvadratinės formos

$g(y_1, y_2, ..., y_n) = b_{11} y_1^2 + 2b_{12} y_1 y_2 + \cdots + 2b_{1n} y_1 y_n + h(y_2, ..., y_n) =$

$b_{11} \left(y_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} y_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} y_n\right)^2 + \left(-\left(\frac{b_{12}}{b_{11}} y_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} y_n\right)^2 + h(y_2, ..., y_n)\right) \check{=}$

Atliekę keitinį

$y_1 = z_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}} z_2 - \cdots - \frac{b_{1n}}{b_{11}} z_n$

$y_2 = z_2$

$\dots$

$y_n = z_n$

gauname kvadratinę formą

$\check{=} b_{11} z_1^2 + h_1(z_2, ..., z_n) \overset{*}{=}$

Pagal indukcijos prielaidą kvadratinei formai $h_1(z_2, ..., z_n)$ egzistuoja toks keitinys $\begin{pmatrix} z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} t_2 \\ \cdots \\ t_n \end{pmatrix}$, kad $h_1(z_2, ..., z_n) = c_2 t_2^2 + \cdots + c_n t_n^2$.

Tada atliekę keitinį $\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ t_n \end{pmatrix}$, gausime
$\overset{*}{=} b_{11}t_1^2 + c_2t_2^2 + \cdots + c_nt_n^2 = c_1t_1^2 + c_2t_2^2 + \cdots + c_nt_n^2$, čia $c_1 = b_{11}$.
Įrodyta.

Pavyzdys. Kvadratinės formos $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3$ kanoninės formos radimas.

Atlikę keitinį $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ turėsime tokią kvadratinę formą $f = g(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2$, o atlikę keitinį $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ turėsime $f = z_1^2 + z_1z_2 = \left(z_1 + \frac{1}{2}z_2\right)^2 - \frac{1}{4}z_2^2$. Atlikus keitinį $t_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_2, t_2 = z_2, t_3 = z_3, t_4 = z_4$ arba $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$ turėsime $f = t_1^2 - \frac{1}{4}t_2^2$.

Uždavinys. Kvadratinės formos $f = X^TAX$ *rangu* vadinamas matricos A rangas. Įrodykite, kad kvadratinės formas rangas yra lygus nenulinių matricos A tikrinių reikšmių skaičiui.**Įrodyti paliekama studentams**□

Teorema 7 (inercijos dėsnis kvadratinėms formoms). *Tegu kvadratinę formą* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. *dviem būdais galima suvesti prie kanonio pavidalo*:

$$\begin{gathered} \lambda_1y_1^2 + \cdots + \lambda_ry_r^2 - \lambda_{r+1}y_{r+1}^2 - \cdots - \lambda_sy_s^2, \lambda_i > 0 \\ \mu_1z_1^2 + \cdots + \mu_pz_p^2 - \mu_{p+1}z_{p+1}^2 - \cdots - \mu_tz_t^2, \mu_j > 0. \end{gathered}$$

Tada $s = t$ *ir* $r = p$.
Be įrodymo.

Uždavinys. Įrodykite: jeigu C - neišsigimusi matrica, o X - nenulinis stulpelis, tai $CX \neq 0$.

Įrodyti paliekama studentams$\square$

Apibrėžimas. *Realioji kvadratinė forma* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *vadinama teigiamai apibrėžta, jeigu su visais* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$

$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \geq 0$ ir $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Teorema 8. *Realioji kvadratinė forma* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai jos kanoninė forma yra lygi*

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 \ .$$

Įrodymas. Tegu $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} -$ kintamųjų keitinys kvadratinę formą suvedantis prie kanoninio pavidalo $g(y_1, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$. Matrica $C-$ neišsigimusi, todėl $\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. Tegu $\lambda_i \leq 0$. Tada

$$f(x_1', x_2', ..., x_n') = g\left(0, ..., 0, \underset{i}{1}, 0, ..., 0\right) = \lambda_i \leq 0 \ , \text{ čia } \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Taigi, kvadratinė forma f yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kada $\lambda_i > 0$ su visais $i = 1, 2, ..., n$. Atlikę kintamųjų keitinį $y_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} z_i$ su visais i gausime reikiamą kvadratinės formos išraišką $f(x_1, x_2, ..., x_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$.

Įrodyta.

Apibrėžimas. *Tegu kvadratinės formos* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *matrica yra* A. *Tada determinantai*

$$a_1 = |a_{11}|, a_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., a_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vadinami kvadratinės formos f *pagrindiniais minorais.*

Teorema 9 (SYLVESTER J.J. požymis). *Kvadratinė forma yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai visi jos pagrindiniai minorai yra teigiami.*

Be įrodymo.