8 paskaita

Poerdviai. *Veiksmai su poerdviais.*

Apibrėžimas. *Vektorinės erdvės V virš kūno K netuščias poaibis U vadinamas* ***poerdviu****, jeigu*

1) $u_1 + u_2 \in U$ *su visais* $u_1, u_2 \in U$;

2) $au \in U$ *su visais* $a \in K$ *ir su visais* $u \in U$.

Vektorinės erdvės V poerdvis U yra pats vektorinė erdvė tų pačių operacijų kaip ir V atžvilgiu.

Positive Examples.

1. The whole space $\mathbf{R}^n$ is a subspace of itself. And the set consisting of one vector, 0, is a subspace of any space.

2. In $\mathbf{R}^2$, consider the set W of all vectors which are parallel to a given line L. It is clear that the sum of two vectors which are parallel to L is itself parallel to L, and a scalar multiple of a vector which is parallel to L is itself parallel to L. Thus W is a subspace.

3. A similar argument shows that in $\mathbf{R}^3$, the set W of all vectors which are parallel to a given plane (line) is a subspace.

4. The set of all polynomials is a subspace of the space of continuous functions on $[0, 1]$,$C[0, 1]$. The set of all polynomials whose degrees do not exceed a given number, is a subspace of the vector space of polynomials, and a subspace of $C[0, 1]$.

5. The set of differentiable functions is also a subspace of $C[0, 1]$.

Negative Examples.

1. In $\mathbf{R}^2$, the set of all vectors which are parallel to one of two fixed non-parallel lines, is not a subspace. Indeed, if we take a non-zero vector parallel to one of the lines and add a non-zero vector parallel to another line, we get a vector which is parallel to neither of these lines.

2. The set of polynomials of degree 2 is not a subspace of $C[0, 1]$. Indeed, the sum of $x^2 + x$ and $-x^2$ is a polynomial of degree 1.

Svarbiu vektorinio poerdvio pavyzdžiu yra homogeninės tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė.

Teorema. *Homogeninės tiesinių lygčių sistemos*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right. \quad \text{arba } AX=O$$

sprendinių aibė yra stulpelių aritmetinės erdvės K_n poerdvis, kurio dimensija lygi $n-\mathrm{rank}A$.

Įrodymas. Homogeninę tiesinių lygčių sistemą užrašykime taip
$x_1u_1+\cdots+x_nu_n=0$,
čia $u_1,...,u_n-$ matricos A stulpeliai.
Tegu $u=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ ir $v=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}-$ sistemos sprendiniai, t.y.
$\begin{array}{c}\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n\equiv 0\\ \beta_1u_1+\cdots+\beta_nu_n\equiv 0\end{array}$, todėl $(a\alpha_1+b\beta_1)\,u_1+\cdots(a\alpha_n+b\beta_n)\,u_n\equiv 0$ ir vektorius $au+bv$ yra sistemos sprendinys. Gavome, kad sprendinių aibė yra stulpelių aritmetinės erdvės K_n poerdvis.

Tarp tiesinės lygčių sistemos stulpelių yra $r=\text{rank } A$ tiesiškai neprikausomų stulpelių. Tegu tai stulpeliai $u_1,...,u_r$. Tada likusius $n-r$ stulpelius užrašykime jų tiesinėmis kombinacijomis:

$$\begin{array}{c}u_{r+1}=b_{r+1,1}u_1+\cdots+b_{r+1,r}u_r\\ \cdots\\ u_n=b_{n1}u_1+\cdots+b_{nr}u_r\end{array}.$$

Stulpeliai $z_{r+1}=\begin{pmatrix}b_{r+1,1}\\ \cdots\\ b_{r+1,r}\\ -1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix},...,z_n=\begin{pmatrix}b_{n1}\\ \cdots\\ b_{nr}\\ 0\\ \cdots\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ yra homogeninę tiesinių lygčių sistemos sprendinys. Šie stulpeliai yra tiesiškai nepriklausomi.

Tegu $x=\begin{pmatrix}x_1^0\\ \cdots\\ x_r^0\\ x_{r+1}^0\\ \cdots\\ x_n^0\end{pmatrix}-$ koks nors sistemos sprendinys.

Tada $y = x + x^0_{r+1} z_{r+1} + \cdots + x^0_n z_n$ irgi yra sistemos sprendinys. Šio sprendinio komponentės, pradedant $(r+1)-$ ąją, lygios 0. Lygiomis nuliui bus ir likusios r komponenčių, nes vektorių sistema $u_1, ..., u_r-$ tiesiškai nepriklausoma.

Taigi, $y = 0$ ir $x = -x^0_{r+1} z_{r+1} - \cdots - x^0_n z_n$,t.y. stulpeliai $z_{r+1}, ..., z_n-$ tiesiškai neprikausoma generuojanti sistemos sprendinių vektorinio poerdvio sistema. Ji vadinama fundamentaliąja sprendinių sistema.

Įrodyta.

Poerdvių suma ir sankirta.

Apibrėžimas. Tegu U ir W yra vektorinės erdvės poerdviai.Tada jų **suma** $U + W$ vadinama aibė

$$U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\} .$$

Poerdvių U ir W **sankirta** $U \cap W$ vadinama aibė

$$U \cap W = \{v \in V | v \in U \text{ ir } v \in W\} .$$

Aišku, kad ir poervių suma ir poerdvių sankirta yra poerdvis.

Pastaba. Poerdvių suma $U + W$ yra mažiausias V poerdvis, kuriame yra poerdviai U ir W.

Poervių sankirta $U \cap W$ yra didžiausias V poerdvis, esantis ir poedvyje U ir poerdvyje W.

Teorema. $\dim (U + W) + \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Įrodymas. Pažymėkime $U + W = P$ ir $U \cap W = R$; $\dim P = p$ ir $\dim R = r$.

Tegu $e_1, e_2, ..., e_r-$ poerdvio P bazė. Papildykime ją iki poerdvio U bazės ir poerdvio V bazės. Tegu $e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_s-$ U bazė, o $e_1, e_2, ..., e_r, e'_{r+1}, ..., e'_t-$ V bazė. Parodysime, kad vektorių sistema $e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_s, e'_{r+1}, ..., e'_t-$ poerdvio $U + V$ bazė. Reikia įrodyti, kad ši sistema yra generuojanti ir tiesiškai nepriklausoma sisitema.

Tegu $v-$ bet kuris poerdvio $P = U + V$ vektorius, t.y. $v = u + v$, čia $u \in U, v \in V$. Taigi, $u = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r + a_{r+1} e_{r+1} + \cdots + a_s e_s$ ir $v = b_1 e_1 + \cdots + b_r e_r + b_{r+1} e'_{r+1} + \cdots + b_t e'_t$. Turime $v = (a_1 + b_1) e_1 + \cdots + (a_r + b_r) e_r + a_{r+1} e_{r+1} +$

$\cdots + a_s e_s + b_{r+1} e'_{r+1} + \cdots + b_t e'_t$ ir todėl vektoriai $e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_s, e'_{r+1}, ..., e'_t$ generuoja P.

Įrodysime sistemos tiesišką nepriklausomybę. Tegu $c_1 e_1 + \cdots + c_r e_r + c_{r+1} e_{r+1} + \cdots + c_s e_s + c'_{r+1} e'_{r+1} + \cdots + c'_t e'_t = 0$.

Tada $u = c_1 e_1 + \cdots + c_r e_r + c_{r+1} e_{r+1} + \cdots + c_s e_s = -c'_{r+1} e'_{r+1} - \cdots - c'_t e'_t \in R$ ir todėl $u = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r$.

Turime $a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r = -c'_{r+1} e'_{r+1} - \cdots - c'_t e'_t$,

$a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r + c'_{r+1} e'_{r+1} + \cdots + c'_t e'_t = 0$ ir $a_1 = \cdots = a_r = c'_{r+1} = \cdots = c'_t = 0$, nes vektoriai $e_1, e_2, ..., e_r, e'_{r+1}, ..., e'_t -$ tiesiškai nepriklausoma sistema($V-$ bazė). Taigi, $u = 0$.

Turime $c_1 e_1 + \cdots + c_r e_r + c_{r+1} e_{r+1} + \cdots + c_s e_s = 0$ ir $c_1 = \cdots = c_r = c_{r+1} = \cdots = c_s = 0$, nes vektoriai $e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_s -$ tiesiškai nepriklausoma sistema($U-$ bazė).

Įrodėme sistemos tiesišką nepriklausomybę ir tuo pačiu tai ,kad ji yra $U + V$ bazė. Poerdvių U, V , P ir R turime lygybes:

$\dim U + V = s + t - r = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$.

Įrodyta.

Paskutinioji teorema formuoja mūsų intuiciją apie poerdvių padėtį daugiamatėse vektorinėse erdvėse.

[.......]

Poerdvių tiesioginė suma ir faktorerdvė.

Apibrėžimas. Tegu U ir W yra vektorinės erdvės poerdviai.Tada jų *suma* $U + W$ vadinama **tiesiogine suma** $U \oplus W$,jeigu bet kurio $U + W$ vektoriaus reiškimas vektorių iš U ir W suma yra vienintėlis.

Paskutinis apibrėžimas ekvivalentiškas sąlygai: iš lygybės $u + w = 0$,$u \in U, w \in W$ turime $u = 0$ ir $w = 0$.

Teiginys. Suma $U + W$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai $U \cap W = 0$.

Įrodymas.[...........]

Teiginys. Suma $U + W$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai sumos bazė yra$U$ ir W bazių sąjunga.

Įrodymas.[..........]

Apibrėžimas. Tegu U_1,U_2, ..., U_k yra vektorinės erdvės poerdviai.Tada jų *suma* $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ vadinama *tiesiogine suma* $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$,jeigu bet kurio $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ vektoriaus reiškimas vektorių iš U_1,U_2, ..., U_k suma yra vienintėlis.

Paskutinis apibrėžimas ekvivalentiškas sąlygai: iš lygybės $u_1 + u_2 + \cdots + u_k$, $u_i \in U_i$, turime $u_i = 0$.

Paskutinįjį teiginį galima apibendrinti baigtiniai poerdvių sumai.

Teiginys. Suma $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai

$$\forall i \; U_i \cap (U_1 + \cdots U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n) = 0.$$

Įrodymas. Be įrodymo.

Teiginys. Suma $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai sumos bazė yra U_1,U_2, ..., U_k bazių sąjunga.

Įrodymas. Be įrodymo.

Uždavinys. Tegu $V = U \oplus W$. Tada poerdvis U vadinamas poerdvio W *tiesioginiu papildiniu.*

Ar kievienam vektorinės erdvės poerdviui egzistuoja tiesioginis papildinys?

Jeigu egzistuoja tai ar vienintėlis šis tiesioginis papildinys?

Atsakymus pagrįskite.

Įrodyti paliekama studentams□

Apibrėžimas. Tegu U yra vektorinės erdvės V poerdvis. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ vadinama *tiesiškai nepriklausoma poerdvio U atžvil- giu sistema (t.n.mod U sistema)*, jeigu kai $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \in U$, tai $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Teiginys. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra t.n. mod U sistema tada ir tik tada, kai vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k, u_1, ..., u_m$, čia $u_1, ..., u_m$ - poerdvio U bazė, yra tiesiškai nepriklausoma.

Įrodymas.$\diamondsuit$

Apibrėžimas. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ vadinama baze poerdvio U atžvilgiu (baze $modU$) jeigu bet kuris vektorius $v \in V$ yra lygus $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + u$, čia $u \in U$.

Teiginys. Vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra bazė poerdvio U atžvilgiu tada ir tik tada, kai vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k, u_1, ..., u_m$,čia $u_1, ..., u_m$ - poerdvio U bazė, yra vektorinės erdvės V bazė.

Įrodymas.$\diamondsuit$

Pastaba. Jeigu $u_1, ..., u_m$ - poerdvio U bazė, tai bet kuri vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ papildanti šią sistemą iki vektorinės erdvės V bazės yra bazė poerdvio U atžvilgiu.

Apibrėžimas. Sakysime, kad vektoriai v_1 ir v_2 lygsta poerdvio U atžvilgiu, jeigu $v_1 - v_2 \in U$. Žymėsime $v_1 \equiv v_2 \,(U)$.

Šio ekvivalentumo sąryšio dėka vektorinė erdvė V suskyla į ekvivalentumo klases, kurios savo ruoštu sudaro naują vektorinę erdvę, vadinamą *faktorerdve* ir žymima V/U . Faktorerdvės elementus žymėsime $\bar{v}$, čia v - klasės atstovas.

Teiginys. Jeigu vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra baze poerdvio U atžvilgiu, tai sistema $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_k$ yra V/U bazė.

Jeigu sistema $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_k$ yra V/U bazė, o $v_1 \in \bar{v}_1, v_2 \in \bar{v}_2, ..., v_n \in \bar{v}_n$, tai vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_k$ yra baze poerdvio U atžvilgiu.

Įrodymas.[...........]

Ištirkime nehomogeninės tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibės struktūrą.

Teorema. *Nehomogeninės tiesinių lygčių sistemos*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad \text{arba } AX = b$$

sprendinių aibė yra $v_0 + U = \{v_0 + u : u \in U\}$, *čia* $v_0 -$ *atskiras nehomogeninės* *sistemos sprendinys, o $U-$ atitinkamos homogeninės sistemos $AX = O$ sprendinių poerdvis.*

Įrodymas. Tegu v_0- koks nors atskiras sistemos $AX = b$ sprendinys, o $u-$ bet koks atitinkamos homogeninės sistemos $AX = O$ sprendinys, $u \in U$. Tada $A(v_0 + u) = Av_0 + Au = b + O = b$ ir $v_0 + u-$ sistemos $AX = b$ sprendinys.

Priešingai.Tegu v_0- atskiras sistemos $AX = b$ sprendinys, o $v-$ bet koks šios sistemos sprendinys. Tada $A(v_0 - v) = Av_0 - Av = b - b = O$ ir $v_0 - v \in U$, t.y. $v_0 - v = u$ ir $v = v_0 + u \in v_0 + U$.

Įrodyta.

Apibrėžimas. Tegu U yra vektorinės erdvės V poerdvis, o $v \in V$. Aibė $v + U = \{v + u : u \in U\}$ vadinama **tiesine daugdara** arba plokštuma erdvėje V. Jeigu $\dim U = 1$, tai tiesinė daugdara vadinama tiese.

Taigi, nehomogeninės tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė yra tiesinė daugdara stulpelių aritmetinėje erdvėje K_n.

Pavyzdys. Nagrinėkime homogeninę lygtį

$$ax + by = 0.$$

Šios homogeninės lygties sprendinių aibė yra stulpelio $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ tiesinis apvalkalas $T = \left[\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right]$.Geometriškai - tai tiesė l dvimatėje plokštumoje, einati per koordinačių pradžią vektoriaus $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ kryptimi.

Nagrinėkime dabar nehomogeninę lygtį

$$ax + by = c,\ c \neq 0$$

Turime $a(-b) + b\left(a + \frac{c}{b}\right) = c$ ir todėl aibė $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix} + T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right]$ yra lygties sprendinių aibė. Geometriškai - tai tiesė dvimatėje plokštumoje lygiagreti tiesei l ir paslinktai vektoriaus $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}$ kryptimi.