6 paskaita

Vektorinės erdvės. Vektorių sistemos.

Apibrėžimas. *Tegu $K-$ kūnas. Aibė V , kurioje apibrėžta sudėties ir daugybos iš kūno K elemento operacijos, vadinama **vektorine erdve**, jeigu su visais $u, v, w \in V$ ir $a, b \in K$ išpildytos šios sąlygos:*

1. $u + v \in V$;
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. $u + v = v + u$;
4. $\exists o : v + o = v$;
5. $\exists (-v) : v + (-v) = o$;
6. $a (u + v) = au + au$;
7. $(a + b) u = au + ab$;
8.$(ab) u = a (bu)$;
9. $1_K \cdot u = u$.

Vektorinės erdvės elementai vadinami vektoriais.

Pavyzdžiai.1 . Su kiekvienu n $K^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in K\}$ - eilučių su n komponenčių vektorinė erdvė. Ši erdvė dar vadinama aritmetine $n-$ erdve. Eilučių komponentės vadinamos vektoriaus koordinatėmis.

2. Visų realiųjų tolydžių intervale $[0, 1]$ funkcijų vektorinė erdvė $C [0, 1]$ virš kūno $\mathbf{R}$.

3. Su visais k ir n visų $k \times n$ matricų vektorinė erdvė $M_{k,n} (K)$ virš kūno K.

4. Kompleksinių skaičių aibė $\mathbf{C}$ - vektorinė erdvė virš kūno $\mathbf{R}$.

Apibrėžimas. *Išraišką $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ vadiname vektorių $v_1, v_2, ..., v_n$ **tiesine kombinacija**; čia $a_1, a_2, ..., a_n \in K$.*

Apibrėžimas. *Vektorių sistemą $v_1, ..., v_n$ vadinsime **tiesiškai priklausoma**, jei tarp šių vektorių yra toks v_i , kuris yra likusių sistemos vektorių tiesinė kombinacija: $v_i = a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n$. Jeigu vektorių sistemoje $v_1, ..., v_n$ nėra vektoriaus, tiesiškai priklausomo nuo likusių, tai šią sistemą vadina **teisiškai nepriklausoma**.*

Susitarta, kad tuščios vektorių sistemos tiesinė kombinacija lygi nuliniam vektoriui: $\underbrace{v + \cdots + u}_{\text{0 dėmenų}} = 0$.

Examples.

1. Every two vectors in the line $\mathbf{R}$ are linearly dependent (one vector is proportional to the other one).

2. Every three vectors a, b, c on a plane $\mathbf{R}^2$ are linearly dependent. Indeed, if a and b are parallel then one of them is a multiple of another one, and so a and b are linearly dependent which implies that all three vectors are linearly dependent. If a and b are not parallel then we know that every vector on the plane, including the vector c, is a linear combination of $a$and b. Thus a, b, c are linearly dependent.

3. If a subset S of R^n consists of more than n vectors then S is linearly dependent. (Prove it!)

4. The set of polynomials $x+1, x^2+x+1, x^2-2x-2, x^2-3x+1$ is linearly dependent. To prove that we need to find numbersa, b, c, d not all equal to 0 such that $a(x+1)+b(x^2+x+1)+c(x^2-2x-2)+d(x^2-3x+1)=0$. This leads to a homogeneous system of linear equations with 4 unknowns and 3 equations. Such a system must have a non-trivial solution by the theorem about homogeneous systems of linear equations.

5. Let $f_1, f_2, ..., f_n$ be functions in $C[0,1]$ each of which has first$n-1$ derivatives. The determinant of the following matrix

$$\begin{pmatrix} f_1(x)\ f_2(x)\ \ldots\ .f_n(x) \\ f_1'(x)\ f_2'(x)\ \ldots.\ f_n'(x) \\ f_1''(x)\ f_2''(x)\ \ldots.\ f_n''(x) \\ \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x)\ f_2^{(n-1)}(x)\ \ldots.f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

is called the **Wronskian** of this set of functions.

Theorem. Let$f_1, f_2, ..., f_n$ be functions in $C[0,1]$ each of which has first $n-1$derivatives. If the Wronskian of this set of functions is not identically zero then the set of functions is linearly independent.

Apibrėžimas. *Jeigu* $A \subset \{v_1, ..., v_n\} \subset B$ *, tai* A *vadinamas sistemos* $v_1, ..., v_n$ *posistemiu, o* $B-$ *viršsistemiu.*

Vektorių sistemų savybės.

1. Sistema iš vieno vektoriaus $\{v\}$ yra tiesiškai priklausoma kai $v=0$ ir tiesiškai nepriklausoma kai $v \neq 0$.

2. Tiesiškai priklausomos sistemos $v_1, ..., v_n$ viršsistemis yra tiesiškai priklausomas.

3. Tiesiškai nepriklausomos sistemos $v_1, ..., v_n$ posistemis yra tiesiškai nepriklausomas.

4. Vektorių sistema, kurioje yra nulinis vektorius, yra tiesiškai priklausoma.

5. Vektorių sistema, kurioje yra du sutampantys vektoriai, yra tiesiškai priklausoma.

6. Vektorių sistema $v_1, ..., v_n$ yra tiesiškai priklausoma tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie ne visi lygūs nuliui $a_1, ..., a_n \in K$, kad $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$.

Įrodymas. $(\Rightarrow)$Tegu $v_1, ..., v_n-$ tiesiškai priklausoma sistema. Tada egzistuoja $v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$ ir todėl $a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1)\, v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n = 0$.

$(\Leftarrow)$ Tegu $a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_i v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n = 0$ ir $a_i \neq 0$, tada $v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{a_n}{a_i} v_n$.

Įrodyta.

7. Vektorių sistema $v_1, ..., v_n$ yra tiesiškai nepriklausoma tada ir tik tada, kai iš $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ turime $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Įrodymas. Akivaizdu.

Apibrėžimas. *Tegu $v_1, ..., v_n \in V,-$ vektorių sistema. Vektorinės erdvės V poaibis $\{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n | a_1, ..., a_n \in K\} = [v_1, ..., v_n]$ vadinamas vektorių sistemos $v_1, ..., v_n$* ***tiesiniu apvalkalu****. Vektorių sistema $v_1, ..., v_n$ vadinama generuojančia šį tiesinį apvalkalą sistema.*

Aišku, kad vektorių sistemos $v_1, ..., v_n$ tiesinis apvalkalas $[v_1, ..., v_n]$ yra vektorinė erdvė, o bet koks generuojančios sistemos viršsistemis yra generuojanti sistema.

Examples.

1. Let $V = R^3$. Let S consist of one non-zero vector A. Then spanA consists of all vectors of the form xA. In other words, span$A$ consists of all vectors which are proportional to A, or span(A) is the set of vector parallel to A.

2. Let $V = R^3, S = (1,0,0),(0,1,0)$. Then span$(S)$ consists of all vectors of the form $x(1,0,0) + y(0,1,0) = (x,y,0)$, that is span$(S)$ consists of all vectors parallel to the (x,y)-plane. More generally, if we take any two non-parallel vectors A and B in R^3 then spanA, B is the subspace of all vectors which are parallel to the plane containing A and B.

3. Let $V = R^3, S = (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Then span$(S)$ coincides with the whole R^3. More generally if $V = R^n$ then$V$ is spanned by the set of basic vectors$(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)$.

Theorem. Two subsets S_1 and S_2 of a vector space V span the same subspace if and only if every vector of S_1 is a linear combination of vectors of S_2 and every vector of S_2 is a linear combination of vectors of S_1.

The proof is left as an exercise.

Examples.

1. Vectors $a = (1, 2, 3), b = (0, 1, 2)$,and $c = (0, 0, 1)$ span R^3. Indeed, we know that R^3 is spanned by the vectors $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0)$ and $k = (0, 0, 1)$.Thus we need to show that the sets a, b, c and i, j, k span the same subspace. By the previous theorem, we need to show that every vector from the first subset is a linear combination of vectors from the second subset and conversely every vector from the second subset is a linear combination of vectors of the first subset. It is clear that a, b, c are linear combinations of i, j, k (as any vector in R^3). So we need to show only that i, j, k are linear combinations of a, b, c. This is easy to check :$i = a - 2b + c; j = b - 2c; k = c$.

2. Polynomials $f_1 = x^2 + 2x + 1, f_2 = x + 1$and $f_3 = x + 2$ in the space of all polynomials P span the subspace P_2 of all polynomials of degree not exceeding 2. Indeed, it is clear that P_2 is spanned by the polynomials $p_1 = 1, p_2 = x$ and $p_3 = x^2$. So we need to show that the setsf_1, f_2, f_3 and p_1, p_2, p_3 span the same subspace. It is clear that f_1, f_2, f_3 are linear combinations of p_1, p_2, p_3. Conversely, it is easy to check that $p_1 = f_3 - f_2; p_2 = 2f_2 - f_3; p_3 = f_1 - 3f_2 + f_3$.

3. Let $a = (1, 2, 3, 4), b = (3, -1, 5, 2), c = (-1, 2, 0, 1), d = (2, 1, 4, 5)$. Determine whether span$\{a, b\}$=span$\{c, d\}$. We need to check if a and $b$are linear combinations of vectors $c$and$d$, and whether$c$ and d are linear combinations of vectors a and b. By definition of a linear combination, the vector a is a linear combination of c and d if there exist x and y such that $a = xc + yd$ This gives the following system of linear equations:

$1 = -x + 2y$
$2 = 2x + y$
$3 = 0x + 4y$
$4 = x + 5y$.

This system does not have a solution, so a is not a linear combination of c and d, so span$\{a, b\}$ is not equal to spanc, d.

Apibrėžimas. *Generuojančią sistemą vadiname minimalia, jeigu bet koks jos posistemis nėra generuojanti sistema.*

Tiesiškai nepriklausoma sistema vadinama maksimalia, jeigu bet koks jos virš-sistemis yra tiesiškai priklausoma sistema.

Dabar pateiksime svarbias tiesinių apvalkalų savybes.

Teiginys 1. *Jeigu vektorių sistemos $v_1, ..., v_n$ vektoriai yra vektorių sistemos $u_1, ..., u_m$ vektorių tiesinės kombinacijos, t.y. $v_1, ..., v_n \in [u_1, ..., u_m]$, ir vektorius $v \in [v_1, ..., v_n]$, tai $v \in [u_1, ..., u_m]$.*

Įrodymas.Paliekame įrodyti studentams.

Teiginys 2. *Tegu $v_1, ..., v_n-$ tiesiškai nepriklausoma sistema, o $v, v_1, ..., v_n-$ tiesiškai priklausoma sistema. Tada vektorius $v \in [v_1, ..., v_n]$.*

Įrodymas.Paliekame įrodyti studentams.

Teorema. *Tegu $v_1, ..., v_n-$ vektorinės erdvės V vektorių sistema. Šie trys teiginiai yra ekvivalentūs:*

1. $v_1, ..., v_n-$ tiesiškai nepriklausoma ir vektorinę erdvę V generuojanti sistema.

2. $v_1, ..., v_n-$ maksimali tiesiškai nepriklausoma sistema.

3. $v_1, ..., v_n-$ minimali vektorinę erdvę V generuojanti sistema.

Įrodymas. 1⇒2. Kadangi $v_1, ..., v_n-$ generuojanti erdvę V sistema, tai kiekvienas vektorius $v \in V$ yra tiesinė vektorių sistemos $v_1, ..., v_n$ kombinacija, t.y. $v \in [v_1, ..., v_n] \Longrightarrow$ sistema $v,\ v_1, ..., v_n-$ tiesiškai priklausoma $\Longrightarrow v_1, ..., v_n-$ maksimali tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema.

2⇒3. Su kiekvienu $v \in V$ sistema $v,\ v_1, ..., v_n$ yra tiesiškai priklausoma sistema. pagal teiginį 1 $v \in [v_1, ..., v_n] \Longrightarrow v_1, ..., v_n-$ generuojanti vektorių sistema. Sakykime, vektorių sistema $v_2, ..., v_n$ irgi yra vektorinę erdvę V generuojanti sistema$\Longrightarrow$ kiekvienas vektorius $v \in V$ (tame tarpe ir $v_1, ..., v_n$) yra vektorių $v_2, ..., v_n$ tiesinė kombinacija$\Longrightarrow v_1, ..., v_n \in [v_2, ..., v_n] \Longrightarrow v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \Longrightarrow$ sistema $v_1, ..., v_n-$ tiesiškai priklausoma, prieštaravimas prielaidai.

3⇒ 1. Sakykime, $v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \Longrightarrow v_1 \in [v_2, ..., v_n]$. Iš teiginio 2 turime, kad kiekvienas vektorinės erdvės V vektorius $v \in [v_2, ..., v_n]$, prieštaravimas prielaidai.

Įrodyta.

Apibrėžimas. *Vektorinės erdvės V vektorių sistema, tenkinanti vieną iš teo-*

remos sąlygų, vadinama vektorinės erdvės V ***baze.***

Positive examples.

1.The set of vectors $V_1 = (1, 0, ..., 0), V_2 = (0, 1, ..., 0), ..., V_2 = (0, ..., 1)$ is a basis of R^n.

2.The set of vectors$(1, 2), (2, 3)$ is a basis of R^2. Indeed, these vectors are linearly independent because they are not proportional. In order to check that R^2 is spanned by these vectors, it is enough to check that $(1, 0)$ and $(0, 1)$ are linear combinations of them (theorem about spans):

$(1, 0) = -3 \cdot (1, 2) + 2 \cdot (2, 3)$;

$(0, 1) = 2 \cdot (1, 2) - (2, 3)$.

In fact, every two non-parallel vectors in the plane R^2 form a basis of R^2.

3. The set of polynomials $1, x, x^2$ is a basis of the space of polynomials of degree at most 2.

4.The set of functionsx, e^x, e^{2x} is a basis of the subspace$V$ of $C[0, 1]$ spanned by these functions. Indeed, these functions are linearly independent and V is spanned by these functions by the definition of V.

5.The set of matrices:$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

is a basis of the space of all 2 by 2 matrices. First we need to prove that these matrices are linearly independent. Indeed, if we take a linear combination of these matrices with coefficients a, b, c, d, we get the matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. This matrix is equal to the zero matrix only if $a = b = c = d = 0$. Second, we need to show that these 4 matrices span the space of all 2 by 2 matrices. Indeed, every 2 by 2 matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is the linear combination of our four matrices with coefficientsa, b, c, d.

Negative examples

1.The set of two vectors $u = (1, 2, 3)$ and $v = (2, 3, 4)$ is not a basis of R^3. Indeed, although these vectors are linearly independent, they do not span R^3. For example, the vector $(1, 0, 0)$ is not equal to a linear combination of u and$v$.

2.The set of four vectors $u = (1, 2, 3), i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$ is not a basis of R^3. Indeed, although these vectors span R^3 (even i, j, k span R^3), these vectors are not linearly independent because $u = i + 2j + 3k$.

3.The set of functions $u = \sin(x), v = \cos(x), w = x$ is not a basis of $C[0, 1]$ because the function e^x does not belong to the spanu, v, w (prove it using the

Wronskian).

In fact C[0,1] does not have a finite basis at all.