5 paskaita

Kompleksiniai skaičiai.

Apibrėžimas. Kompleksiniu skaičiumi z vadiname vadiname realiųjų skaičių porą (a, b), kurią reikšime lygybe $z = a + ib$; skaičius a vadinamas *realiąja* z dalimi ir žymimas $a = \mathrm{Re}(z)$; skaičius b vadinamas *menamąja* z dalimi ir žymimas $b = \mathrm{Im}(z)$. Kompleksinių skaičių aibė žymima $\mathbf{C}$.

Kompleksinių skaičių aibėje yra apibrėžtas sudėties ir sandaugos veiksmas formulėmis:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i\,(b+d)\,;$$
$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i\,(ad+bc)\,.$$

Kaip matėme aukščiau, kompleksinių skaičių aibė sudėties ir sandaudos atžvilgiu sudaro kūną. Tuo galima įsitikinti ir tiesiogiai tikrinan kūną apibrėžiančias savybes.

Iš apibrėžimo matome, kad kiekvienam kompleksiniam skaičiui $z = a + ib$ galima vienareikšmiškai priskirti plokštumos, kurioje yra Dekarto koordinačių sistema, tašką (a, b). Kompleksinių skaičių aibės reiškimas vadinamas Gauso skaičių plokštuma(Gauss'sche Zahlenebene) arba kompleksinių skaičių plokštuma. Šis reiškimas pasiteisina jau ir tuo, kad pagrindiniai kompleksinių skaičių veiksmai paprastai interpretuojami geometriškai: dviejų kompleksinių skaičių $a+ib$ ir $c+id$ sudėtis interpretuojama kaip dvimačių vektorių (a, b) ir (c, d) suma $(a, b)+(c, d) = (a + c, b + d)$ (prisiminkime lygiagretainio taisyklę).

Sandaugos veiksmo interpretacijai naudojamas **trigonometrinis** kompleksinio skaičiaus $z = a + ib$ reiškimas, įvedant plokštumoje taško (a, b) **polines koordinates** $[r, \varphi]$: čia $r-$ taško $A = (a, b)$ atstumas iki taško $O = (0, 0)$, kuris vadinamas poliumi, o $\varphi-$ kampas tarp teigiamos $x-$ ašies ir spindulio OA. Pastebėsime, kad su kiekvienu $r > 0$ kampas φ yra apibrėžiamas 360° (arba 2π) kampo kartotinio tikslumu; beto kai $r = 0$, kampas φ neapibrėžiamas. taigi, kiekvieną kompleksinį skaičių $z = a + ib$ galime reikšti:

$$z = [r, \varphi]\,, \qquad r \geq 0, \qquad 0^\circ \leq \varphi < 360^\circ \ (\ 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Ryšis tarp dviejų kompleksinio skaičiaus z reiškimų $z = a + ib = (a, b)$ ir $z = [r, \varphi]$ pasireiškia formulėmis:

$$\begin{cases} a = r\cdot\cos\varphi \\ b = r\cdot\sin\varphi \end{cases};$$

ir

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ r \neq 0 \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}.$$

Kompleksinio skaičiaus z koordinatės polinėje koordinačių sistemoje $[r, \varphi]$ yra vadinamos ir reiškiamos:

$r = |z| -$ skaičiaus z **modulis**, $\varphi = \arg z -$ skaičiaus z **argumentas**.

Jeigu kompleksinio skaičiaus argumentą neapribosime intervalu $[0, 2\pi)$, tai du kompleksiniai skaičiai $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ ir $z_2 = [r_2, \varphi_2]$ yra lygūs tada ir tik tada, kada
arba $r_1 = r_2 = 0$ ir $\varphi_1, \varphi_2 -$ bet kokie kampai,
arba $r_1 = r_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$ su visais $k \in \mathbf{Z}$.
Grįžkime prie geometrinės sandaugos veiksmo interpretacijos. Tegu

$$z_1 = [r_1, \varphi_1] = r_1 \cos\varphi_1 + i r_1 \sin\varphi_1$$

ir

$$z_2 = [r_2, \varphi_2] = r_2 \cos\varphi_2 + i r_2 \sin\varphi_2.$$

Tada
$z_1 z_2 = r_1 r_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
ir todėl
$z_1 z_2 = [r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2]$, t.y.

$$\begin{cases} |z_1 z_2| & = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) & = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}.$$

Skaičiaus z_1 sandauga su skaičiumi z_2 geometriškai galime interpretuoti kaip skaičiaus z_1 posūkį kampu φ_2 ir "ištempimą" r_2 kartus. Toks kompleksinių skaičių sandaugos interpretavimas nesunkiai leidžia paaiškinti skaičiaus $z \neq 0$ atvirkštinio skaičiaus $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ geometrinę prasmę.

Apibrėžimas. Tegu $z = a + ib \in \mathbf{C}$. Skaičius $\bar{z} = a - ib \in \mathbf{C}$ vadinamas skaičiaus z **jungtiniu skaičiumi**.

Yra teisingos šios lygybės:
$\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)\,, \quad \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \mathrm{Im}(z)\,, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$
Išraiška $N(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$ vadinama skaičiaus z **norma**.
Tegu dabar

$$z = [r, \varphi]\,, \text{ o } \quad z^{-1} = [q, \psi]\,.$$

Tada

$$z \cdot z^{-1} = [r, \varphi] \cdot [q, \psi] = [r \cdot q, \varphi + \psi] = 1 = [1, 0]\,,$$

t.y.

$$r \cdot q = 1, \qquad \varphi + \psi = 0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ir

$$q = r^{-1}, \qquad \psi = -\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ ir pvz. } \psi = -\varphi.$$

Atsižvelgę į tai, kad $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, o $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, turime, kad
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z^{-1} = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ \bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = r^2$
$\Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{r^2} \quad .$

Tegu dabar $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ ir $z_2 = [r_2, \varphi_2]$, $z_2 \neq 0$(t.y. $r_2 \neq 0$).
Tada

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2\right].$$

Dabar induktyviai apibrėšime kompleksinio skaičiaus z laipsnį z^n, $n \in \mathbf{N}$:

$$z^0 = 1, \qquad z^{n+1} = z^n \cdot z \qquad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Tada

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^n = [r^n, n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Žinodami, kad $z^{-1} = [r^{-1}, -\varphi]$ ir $z^{-n} = (z^{-1})^n$, tai

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^{-n} = [r^{-n}, -n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Taigi

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^n = [r^n, n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{Z},$$

t.y.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ su visiais } n \in \mathbf{Z}.$$

Ši išraiška vadinama **Muavro** (*Abraham de Moivre*,1667-1754) **formule**.
Apibrėšime dabar šaknies traukimo veiksmą iš kompleksinio skaičiaus.

Apibrėžimas. $n-$ ojo laipsnio šaknimi iš kompleksinio skaičiaus z vadiname tokius kompleksinius skaičius w, kuriems teisinga lygybė $w^n = z$.

Parodysime, kad egzistuoja lygiai $n, n \geq 2$, n - ojo laipsnio šaknų iš kompleksinio skaičiaus z.
Tegu

$$z = [r, \varphi] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ o } w = [q, \psi] = q(\cos\psi + i\sin\psi) \text{ ir } w^n = z.$$

Tada

$$[q^n, n \cdot \psi] = [r, \varphi].$$

Jeigu $z = 0$, tai ir $r = 0$, todėl $q^n = 0 \Rightarrow q = 0$, t.y. $w = 0$.
Jeigu $z \neq 0$, tai ir $r \neq 0$, todėl

$$\begin{aligned} q^n = r, &\qquad n \cdot \psi = \varphi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z} \\ \Rightarrow q = \sqrt[n]{r}, &\qquad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \qquad k \in \mathbf{Z}.. \end{aligned}$$

Jeigu $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, tai iš lygybės

$$\frac{\varphi+2\pi k_1}{n}=\frac{\varphi+2\pi k_2}{n}+2\pi\cdot l,\qquad l\in\mathbf{Z}$$

turime, kad

$$k_1-k_2=l\cdot n\qquad \text{su kažkuriuo } l\in\mathbf{Z}.$$
$$k_1\equiv k_2\,(\operatorname{mod} n)\,.$$

Gavome: jeigu $z\neq 0$ ir $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\in\mathbf{C}$, tai $n-$ ojo laipsnio šaknimis yra kompleksiniai skaičiai

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\qquad k\in\mathbf{Z},$$

ir du tokie skaičiai w_{k_1} ir w_{k_2} yra lygūs tada ir tik tada, kada $k_1\equiv k_2\,(\operatorname{mod} n)\,.$ Visos skirtingos $n-$ ojo laipsnio šaknys iš kompleksinio skaičiaus z yra $w_0,w_1,...,w_{n-1}.$

Teiginys. Tegu $z=a+ib,\ z_1,\ z_2\in\mathbf{C}$. Tada yra teisingos šios savybės.
1) $\overline{(\bar{z})}=z,$

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\text{ atskiru atveju }\overline{-z}=-\bar{z}.$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\text{ atskiru atveju }\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}.$$

2) Jeigu $N\left(z\right)=z\cdot\bar{z}=|z|^2$, tai

$$N\left(z_1\cdot z_2\right)=N\left(z_1\right)\cdot N\left(z_2\right)\text{ ir }N\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{N\left(z_1\right)}{N\left(z_2\right)}\text{ su visiais }z_2\neq 0.$$

3) Jeigu $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$, tai

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\,,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\qquad\text{su visiais }z_2\neq 0.$$

4) (*Trikampio nelygybė*).

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|\,.$$

Įrodymas. Įrodysime trikampio nelygybę:

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2 =$$
$$|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)+|z_2|^2 \le |z_1|^2+2\,|z_1\cdot\bar{z}_2|+|z_2|^2 = |z_1|^2+2\,|z_1\cdot z_2|+|z_2|^2 =$$
$$(|z_1|+|z_2|)^2.$$

Ištraukę aritmetinę kvadratinę šaknį, turėsime

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

Įrodyta.

Išvados. Iš trikampio nelygybės turime

$$|z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$$
$$\left.\begin{array}{l}|z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2| \\ |z_1+z_2| \ge |z_2|-|z_1|\end{array}\right\} \Rightarrow |z_1+z_2| \ge ||z_1|-|z_2||$$

taigi su visais $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ yra teisinga

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

Grįžkime prie neredukuojamų polinomų virš realiųjų skaičių kūno $\mathbf{R}$ ir virš kompleksinių skaičių kūno $\mathbf{C}$. Fundamentalioji algebros teorema teigia:

Fundamentalioji algebros teorema. Bet kokia algebrinė lygtis $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, $n \ge 1$ su kompleksiniais koeficientais $a_i \in \mathbf{C}$ $(0 \le i \le n)$ turi mažiausiai vieną sprendinį $x_0 \in \mathbf{C}$.

Be įrodymo.

Matome, kad $n-$ ojo laipsnio polinomas virš kopleksinių skaičių kūno $\mathbf{C}$ turi lygiai n šaknų. Tokiu atveju sakome, kad $\mathbf{C}$ yra **algebriškai uždaras kūnas**. Akivaizdu, kad neredukuojami polinomai virš $\mathbf{C}$ yra tik pirmojo laipsnio polinomai $x-a, a \in \mathbf{C}$.

Lema. 1. Tegu polinomas $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{C}[x]$ ir $\bar{f}(x) = \bar{a}_n x^n + \cdots + \bar{a}_1 x + \bar{a}_0$. Tada $\overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z})$.

2. Tegu polinomas $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$. Tada $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

Neredukuojamus polinomus virš realiųjų skaičių kūno $\mathbf{R}$ aprašo tokia teorema.

Teorema. Neredukuojami polinomai virš realiųjų skaičių kūno $\mathbf{R}$ yra arba pirmojo laipsnio polinomai $x-a$, $a \in \mathbf{R}$, arba tokie kvadratiniai trinariai x^2+px+q, kad $p^2 - 4q < 0$.

Įrodymas. Įrodysime, kad neredukuojamas virš $\mathbf{R}$ polinomas $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ yra arba $f(x) = x - a$, arba toks $f(x) = x^2 + px + q$, kad $p^2 - 4q < 0$ (aišku, kad šie polinomai yra neredukuojami virš $\mathbf{R}$). Į polinomą $f(x)$ galima žiūrėti ir kaip į polinomą virš $\mathbf{C}$. Tada polinomas $f(x)$ turi kompleksinę šaknį $\alpha = a + ib$ ($\mathbf{C}-$ algebriškai uždaras kūnas): $f(\alpha) = 0$. Galimi du atvejai.

1) Jeigu $\alpha \in \mathbf{R}$, tai $f(x) \vdots (x - \alpha)$ ir kadangi $f-$ neredukuojamas, tai $f(x) = x - \alpha$.

2) Jeigu $\alpha \notin \mathbf{R}$, tai $\alpha \in \mathbf{C}$ ir $\bar{\alpha} \neq \alpha$. Turime $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \overline{f(\alpha)} \overset{\text{Lema}}{=} f(\bar{\alpha}) = 0$, t.y polinomas f turi mažiausiai dvi šaknis α ir $\bar{\alpha}$. Tada $f(x) \vdots (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$. Pastebėsime, kad $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - x(\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha \cdot \bar{\alpha} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbf{R}[x]$ ir $D = 4a^2 - 4a^2 - 4b^2 = -4b^2 < 0$, taigi $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ yra neredukuojamas polinomas virš $\mathbf{R}$. Tada $f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.

Įrodyta.