3 paskaita

Dalumas polinomams.Hornerio shema ir Bezu teorema. Polinomo reiškimas dvinario laipsniais. Polinomo šaknų skaičius. Formalus ir funkcionalus polinomo tapatumas.

Apibrėžimas. Polinomu virš kūno K vadiname begalinę seką $(a_0, a_1, a_2, ...)$, $a_i \in K$, kurios *beveik visi* (t.y. visi, išskyrus baigtinį skaičių) elementai yra lygūs 0. Sakysime, kad du polinomai $(a_0, a_1, a_2, ...)$ ir $(b_0, b_1, b_2, ...)$ yra lygūs, jeigu $a_i = b_i$ su visais $i = 0, 1, 2, ...$. Visų polinomų aibę virš kūno K žymėsime $K[x]$.

Polinomų aibėje $K[x]$ apibėšime šiuos veiksmus:
1. Sudėtis: $(a_0, a_1, a_2, ...) + (b_0, b_1, b_2, ...) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...)$.
2. Daugyba: $(a_0, a_1, a_2, ...) \cdot (b_0, b_1, b_2, ...) = (c_0, c_1, c_2, ...)$, čia

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0 = \sum_{s=0}^{i} a_s b_{i-s} = \sum_{s+t=i} a_s b_t.$$

Šių operacijų atžvilgiu polinomų aibė sudaro komutatyvų žiedą su vienetu. Vienetas šiame žiede yra polinomas $(1, 0, 0, ...)$.

Atsižvelgę į tai, kad $(a, 0, 0, ...) + (b, 0, 0, ...) = (a + b, 0, 0, ...)$ ir $(a, 0, 0, ...) \cdot (b, 0, 0, ...) = (ab, 0, 0, ...)$, ir bendru atveju,

$(a, 0, 0, ...) \cdot (b_0, b_1, b_2, ...) = (ab_0, ab_1, ab_2, ...)$,

mes polinomą $(a, 0, 0, ...)$ galime sutapatinti su elementu a.

Pažymėkime polinomą $(0, 1, 0, 0, ...)$ raide x. Tada $x^2 = (0, 0, 1, 0, ...)$, $x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, ...)$ ir t.t. Iš čia turime, kad

$$\begin{gathered}(a_0, a_1, a_2, ...) = (a_0, 0, 0, ...) + (0, a_1, 0, ...) + (0, 0, a_2, 0, ...) = \\ a_0 (1, 0, 0, ...) + a_1 (0, 1, 0, ...) + a_2 (0, 0, 1, 0, ..) + \cdots = \\ a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_n x^n.\end{gathered}$$

Tegu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ir $a_n \neq 0$. Elementas a_n vadinamas vyriausiuoju koeficientu, o $n-$ polinomo laipsniu, kuris žymimas $\deg f$. Nuliniam polinomui 0 yra priskiriamas laipsnis $-\infty$.

Teiginys. Dviejų polinomų virš kūno sandaugos laipsnis yra lygus yra lygus tų polinomų u laipsnių sumai: $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Įrodymas paliekamas skaitytojams.

Pastaba. Yra susitarta, kad $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$; $(-\infty)+n=-\infty$; $n+(-\infty)=-\infty$.

Hornerio shema .

Apibrėžimas. Jeigu polinomų porai $f(x)$ ir $g(x)$ egzistuoja toks polinomas $h(x)$, kad $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, tai sakysime, kad polinomas f dalijasi be liekanos(arba tiesiog dalijasi) iš polinomo g. Rašysime $f\vdots g$. Polinomas g vadinamas tada polinomo f dalikliu.

Pagrindinės polinomų dalumo savybės(palyginkit su dalumo savybėmis sveikiems skaičiams).

Tegu $K-$ kūnas, o $f,g,h\in K[x]$. Tada

1. $\left.\begin{array}{l} f\vdots h \\ g\vdots h \end{array}\right\} \Rightarrow (f\pm g)\vdots h.$
2. $\left.\begin{array}{l} f\vdots h \\ g\vdots h \end{array}\right\} \Rightarrow (f\cdot g)\vdots h.$
3. Su visais $f\neq 0$, teisinga $0\vdots f$.
4. Su visais $a\in K, a\neq 0$, teisinga $f\vdots a$.
5. Jeigu $1\vdots f$, tai $\deg f=0$, t.y. $f=a\in K$ ir $a\neq 0$.
6. Jeigu $f\neq 0$, tai $f\vdots f$.
7. $\left.\begin{array}{l} f\vdots g \\ g\vdots h \end{array}\right\} \Rightarrow f\vdots h.$

Dabar aptarsime polinomo $f(x)\in K[x]$ dalumo iš dvinario $x-c, c\in K$ klausimą.

Teorema(Hornerio shema). Tegu $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in K[x]$ ir $c\in K$. Tada egzistuoja toks polinomas $h(x)\in K[x]$ ir toks $r\in K$, kad $f(x)=(x-c)h(x)+r$.

Įrodymas. Atsižvelgę į polinomų sandaugos laipsnio skaičiavimą, polinomas $h(x)$ turėtų būti lygus $b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$. Tada $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(x-c)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)+r$. Palyginę kairės ir dešinės pusių koeficientus turėsime:

$$\begin{array}{rcl} a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\ a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1} & & b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2} & & b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2} \\ \cdots & & \cdots \\ a_1 = b_0 - cb_1 & & b_0 = a_1 + cb_1 \\ a_0 = r - cb_0 & & r = a_0 + cb_0 \end{array}.$$

Įrodyta.

Pastaba. Dažniausiai polinomo $h(x)$ koeficientus reiškia taip vadinama **Hornerio schema**:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
c	$\mathbf{b}_{n-1} = a_n$	$\mathbf{b}_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\cdots$	$\mathbf{b}_0 = a_1 + cb_1$	$\mathbf{r} = a_0 + cb_0$

Pavyzdys. Tegu polinomas $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3x^2 + x - 5$, o $c = 2$. Tada Hornerio schema yra:

	2	0	-4	3	1	-5
$c = 2$	2	4	4	11	23	41

ir

$$2x^5 - 4x^3 + 3x^2 + x - 5 = (x-2)(2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 11x + 23) + 41.$$

Polinomo reiškimas dvinario laipsniais.

Teorema. Kiekvieną polinomą $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[x]$ galima reikšti dvinario $x-c$ laipsnių tiesine suma: $f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + b_1(x-c) + b_0$.

Įrodymas. Nagrinėjamo reiškimo koeficientus b_i galima rasti Hornerio schemos pagalba:

a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0	$= \mathbf{b}_0$
b'_{n-1}	b'_{n-2}	$\cdots$	b'_1	b'_0	$= \mathbf{b}_1$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
b''_2	b''_1	b''_0	$= \mathbf{b}_{n-2}$			
b'''_1	b'''_0	$= \mathbf{b}_{n-1}$				
b''''_0	$= \mathbf{b}_n$					

.

Įrodyta.

Teorema(Bezu). Polinomas $f(x) \in K[x]$ dalijasi iš $x - c$ tada ir tik tada, kada c yra polinomo f šaknis, t.y. $f(c) = 0$.

Įrodymas paliekamas skaitytojui.

Polinomo šaknų skaičius.

Teorema(apie polinomo šaknų skaičių). Tegu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ yra polinomas. Tada $f(x)$ šaknų skaičius kūne K neviršija $n (= \deg f)$.

Įrodymas. Matematinė indukcija pagal n. Akivaizdu, kad teiginys yra teisingas visiems nulinio laipsnio polinomams, nes šie polinomai neturi šaknų. Sakykime, teiginys yra teisingas visiems polinomams, kurių laipsnis $< n, n \geq 1$. Nagrinėkime $n-$ ojo laipsnio polinomą $f(x)$. Jeigu polinomas $f(x)$ neturi šaknų kūne K, tai polinomui f teiginys yra teisingas. Jeigu c yra polinomo $f(x)$ šaknis, tai pagal Bezu teoremą $f(x) = (x - c) h(x)$, čia $\deg h(x) = n - 1$. Tegu $c'-$ kita polinomo šaknis $(c \neq c')$, tada $f(c') = (c - c') h(c') = 0 \Rightarrow h(c') = 0$. Taigi, kiekviena polinomo f šaknis, skirtinga nuo c yra ir polinomo h šaknis(atvirkščias teiginys akivaizdus). Pritaikius polinomui h indukcijos prielaidą, turėsime, kad h turi ne daugiau kaip $n - 1$ šaknį. Tada polinomas turės ne daugiau kaip n šaknų.

Įrodyta.

Pastaba. Teorema yra teisinga ir polinomams virš komutatyvių žiedų su vienetu, kuriuose nėra **nulio daliklių**, t.y. tokių $a \neq 0$, kad $a \cdot b = 0$, su kuriuo nors $b \neq 0$. Tokie žiedai yra vadinami integralumo sritimis. Integralumo sritimi yra visi kūnai. Integralumo srities, bet ne kūno pavyzdžiu galėtų būti sveikųjų skaičių žiedas Z. Iš kitos pusės, jeigu K nėra integtalumo sritis(pavyzdžiui, tokiais žiedais yra visi Z_m, kai $m-$ sudėtinis) tai teoremos teiginys nėra teisingas. pavyzdžiui polinomas polinomas $f(x) = x^2$ virš Z_9 turi <u>tris</u> šaknis: $\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}$.

Teorema(apie polinominį ir funkcionalinį tapatumą). Tegu K yra <u>begalinis</u> kūnas, o polinomai $f_1(x), f_2(x) \in K[x]$. Jeigu $f_1(c) = f_2(c)$ su visais $c \in K$, tai $f_1(x) = f_2(x)$.

Įrodymas. Nagrinėkime polinomą $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Šio polinomo laipsnis $\deg F(x) = n \leq \max\{\deg f; \deg g\}$. Tegu dabar $c_1, c_2, ..., c_{n+1}$ yra skirtingi kūno K elementai. Tada pagal sąlygą $n+1$ elementai yra polinomo F šaknys, todėl $F(x) = 0$ ir $f_1(x) = f_2(x)$.

Įrodyta.

Pastaba. Virš baigtinių kūnų K (pavyzdžiui, virš Z_p, $p-$ pirminis skaičius) teoremos teiginys yra neteisingas. Pavyzdžiui, skirtingų polinomų $f_1(x) = x^7 + \bar{5}x + \bar{1}$ ir $f_2(x) = \bar{4}x + \bar{1}$ virš kūno Z_7 reikšmės visuose kūno Z_7 elementuose sutampa:

$f_1(\bar{0}) = f_2(\bar{0}) = \bar{1}; f_1(\bar{1}) = f_2(\bar{1}) = \bar{5}; f_1(\bar{2}) = f_2(\bar{2}) = \bar{2}; f_1(\bar{3}) = f_2(\bar{3}) = \bar{6}; f_1(\bar{4}) = f_2(\bar{4}) = \bar{1}; f_1(\bar{5}) = f_2(\bar{5}) = \bar{0}; f_1(\bar{6}) = f_2(\bar{6}) = \bar{4}.$