15 paskaita

Realaus operatoriaus kanoninė bazė ir kanoninė matrica

Tegu $\mathcal{A}$ – operatorius realioje vektorinėje erdvėje V. Tegu

$$\bar{V} = \{u + iv | u, v \in V\}$$

yra vektorinės erdvės V *kompeksifikacija*, t.y. kompleksinė vektorinė erdvė. Formule $\mathcal{A}(u + iv) = \mathcal{A}(u) + i\mathcal{A}(v)$ operatorius apibrėžiamas erdvėje $\bar{V}$. Tegu operatoriaus $\mathcal{A}$ tikrinės reikšmės yra $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, ..., \lambda_s, \bar{\lambda}_s, \lambda_{s+1}, ..., \lambda_r$, čia $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, ..., \lambda_s, \bar{\lambda}_s \in \mathbf{C}, \lambda_{s+1}, ..., \lambda_r \in \mathbf{R}$. Vektorinė erdvė V yra šakninių poerdvių, atinkančių tikrines reikšmes, tiesioginė suma:

$$V = \left(V_{\lambda_1} \oplus V_{\bar{\lambda}_1}\right) \oplus \cdots \oplus (V_{\lambda_s} \oplus V_{\bar{\lambda}_s}) \oplus V_{\lambda_{s+1}} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}.$$

Tegu šakninis poerdvis $V_{\lambda j}$ ($j = 1, ..., s$) yra bokštinių (ciklinių) poerdvių tiesioginė suma:

$$V_{\lambda_j} = \langle v_{j1} \rangle \oplus \cdots \oplus \left\langle v_{j,t_j} \right\rangle$$

Tada šakninis poerdvis $V_{\bar{\lambda}_j}$ yra bokštinių (ciklinių) poerdvių tiesioginė suma:

$$V_{\bar{\lambda}_j} = \langle \bar{v}_{j1} \rangle \oplus \cdots \oplus \left\langle \bar{v}_{j,t_j} \right\rangle,$$

čia $v_{jl} = u_{jl} + iw_{jl}-$ šakninis vektorius atitinkantis tikrinę reikšmę λ_j ($u_{jl}, w_{jl} \in V$) ir $\bar{v}_{jl} = u_{jl} - iw_{jl}-$ šakninis vektorius atitinkantis tikrinę reikšmę $\bar{\lambda}_j$.

Realiųjų vektorių bazė poerdvyje

$$\langle v_{jl} \rangle \oplus \langle \bar{v}_{jl} \rangle, 1 \leq j \leq s \text{ ir } 1 \leq l \leq t_j,$$

konstruojama taip. Tegu vektoriai

$$z_1 = x_1 + iy_1, ..., z_k = x_k + iy_k$$

yra poerdvio $\langle v_{jl} \rangle$ bazė. Tada vektoriai

$$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1, ..., \bar{z}_k = x_k - iy_k$$

yra poerdvio $\langle \bar{v}_{jl} \rangle$ bazė ir realieji vektoriai $x_1, y_1, ..., x_k, y_k$ yra poerdvio $\langle v_{jl} \rangle \oplus \langle \bar{v}_{jl} \rangle$ bazė.
Žinome, kad

$$(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})(z_1) = z_2, (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})(z_2) = z_3, ..., (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})(z_{k-1}) = z_k, (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})(z_k) = 0$$

$$\mathcal{A}(z_1) = \lambda_j z_1 + z_2, \mathcal{A}(z_2) = \lambda_j z_2 + z_3, ..., \mathcal{A}(z_{k-1}) = \lambda_j z_{k-1} + z_k, \mathcal{A}(z_k) = \lambda_j z_k.$$

Jeigu $\lambda_j = a_j + ib_j$, tai

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}(x_1) + i\mathcal{A}(y_1) = a_j x_1 - by_1 + i(b_j x_1 + a_j y_1) + x_2 + iy_2, \\
\mathcal{A}(x_2) + i\mathcal{A}(y_2) = a_j x_2 - by_2 + i(b_j x_2 + a_j y_2) + x_3 + iy_3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathcal{A}(x_{k-1}) + i\mathcal{A}(y_{k-1}) = a_j x_{k-1} - by_{k-1} + i(b_j x_{k-1} + a_j y_{k-1}) + x_k + iy_k, \\
\mathcal{A}(x_k) + i\mathcal{A}(y_k) = a_j x_k - by_k + i(b_j x_k + a_j y_k),
\end{gathered}$$

arba

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}(x_1) = a_j x_1 - by_1 + x_2, \\
\mathcal{A}(y_1) = b_j x_1 + a_j y_1 + y_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathcal{A}(x_{k-1}) = a_j x_{k-1} - by_{k-1} + x_k, \\
\mathcal{A}(y_{k-1}) = b_j x_{k-1} + a_j y_{k-1} + y_k, \\
\mathcal{A}(x_k) = a_j x_k - by_k, \\
\mathcal{A}(y_k) = b_j x_k + a_j y_k.
\end{gathered}$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica nagrinėjamoje bazėje yra:

$$A_{jl} = \begin{pmatrix}
\mathbf{a}_j & \mathbf{b}_j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{-\ b}_j & \mathbf{a}_j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_j & \mathbf{b}_j & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-\ b}_j & \mathbf{a}_j & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_j & \mathbf{b}_j \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-}b_j & \mathbf{a}_j
\end{pmatrix}.$$

Analogiškai galima nagrinėti likusias bokštinių poerdvių tiesiogines sumas ir tada operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica bus

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & A_{1,t_1} & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & A_{s,1} & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & A_{s,t_s} & & & \\ & & & & & & & J_{s+1} & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & J_r \end{pmatrix},$$

čia $J_{s+1}, ..., J_r-$ Žordano matricos atitinkančios realiąsias tikrines reikšmes $\lambda_{s+1}, ..., \lambda_r$; matricos A nenurodytose vietose yra nuliai.

Realaus operatoriaus matricos kanoninės formos pavyzdys.

Tegu operatoriaus $\mathcal{A} : \mathbf{R}_8 \to \mathbf{R}_8$ matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas yra lygus

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1.$$

Šio polinomo kanoninis skaidinys virš realiųjų skaičių ir kompleksinių skaičių kūnų yra

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = (x^2 + x + 1)^4 = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)^4 \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right)^4$$

Charakteristinis polinomas turi dvi kompleksines tikrines reikšmes: $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ir $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Matome, kad $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$.

Jei operatorių $\mathcal{A}$ nagrinėsime kaip operatorių kompleksinėje vektorinėje $\mathbf{C}^8$, $\mathcal{A}(u+iv) = \mathcal{A}(u) + i\mathcal{A}(v)$, čia u ir $v-$ realieji vektoriai, tai visa vektorinė erdvė suskyla į dviejų šakninių poerdvių tiesioginę sumą:

$$\mathbf{C}^8 = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}.$$

Rasime operatoriaus $\mathcal{A}$ siaurinio šakniniame poerdvyje V_{λ_1} Žordano bazę ir Žordano matricą.

Pažymėkime $B = A - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) I$ ir nagrinėkime poerdvių grandinę

$$0 \subset \ker B \subset \ker B^2 \subset \ldots$$

Rasime šių poerdvių bazes.

$\underline{\ker B}$

Sprendžiame homogeninę lygčių sistemą

$$B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemos bedrasis sprendinys yra : $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}it_1\sqrt{3} + \frac{1}{8}t_3 - \frac{1}{8}it_3\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}t_3 + \frac{1}{4}it_3\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{6}it_1\sqrt{3} - \frac{1}{6}it_3\sqrt{3} \\ t_1 \\ \frac{1}{8}t_2 + \frac{1}{8}it_2\sqrt{3} \\ t_2 \\ \frac{3}{2}t_1 + \frac{1}{2}it_1\sqrt{3} - \frac{3}{4}it_3\sqrt{3} - \frac{1}{4}t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$, $t_i \in \mathbf{C}$.

Fundamentalioji sprendinių siatema ir $\ker B$ bazė yra :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}i\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}i\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{8}-\frac{1}{8}i\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\sqrt{3} \\ -\frac{1}{6}i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4}i\sqrt{3}-\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

turime $rank \ker B = 3$.

$$\underline{\ker B^2}$$

Sprendžiame homogeninę lygčių sistemą

$$B^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemos bendrasis sprendinys yra :

$$\begin{pmatrix} t_3 \\ t_4 \\ -\frac{1}{3}t_3 - \frac{1}{3}it_3\sqrt{3} - \frac{1}{3}t_4 - \frac{1}{3}i\sqrt{3}t_4 + \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{3}it_1\sqrt{3} \\ t_1 \\ \frac{1}{8}t_2 + \frac{1}{8}it_2\sqrt{3} \\ t_2 \\ 2t_3 - 2it_3\sqrt{3} - \frac{1}{2}t_4 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}t_4 - \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}it_1\sqrt{3} \\ 4it_3\sqrt{3} - 2t_4 + 3t_1 - it_1\sqrt{3} \end{pmatrix}, t_i \in \mathbf{C}.$$

Turime $rank \ker B = 4$ ir vektorius $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ yra tiesiškai nepriklausomas $\ker B$ atžvilgiu.

Turime

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi Žordano bazė yra

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} & & \\ \hline \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i\sqrt{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{3} \\ -\frac{1}{6}i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4}i\sqrt{3} - \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}i\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Tada vektorių sistema

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8}\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sudaro $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$, t.y. visos vektorinės erdvės bazę.
Bazių keitimo matrica yra

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 0.5 & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 1.5 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operatoriaus matrica naujoje bazėje yra

$$
C^{-1}AC = \begin{pmatrix}
-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}
\end{pmatrix}.
$$