14 paskaita.
OPERATORIAI VEKTPORINĖSE ERDVĖSE VIRŠ $\mathbf{C}$*.*

Matricos Žordano forma.

Tegu $\mathcal{A}$ yra vektorinės erdvės V virš $\mathbf{C}$ operatorius ir $\chi_{\mathcal{A}}(t)-$ charakteristinis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas. Tegu

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_s)^{n_s}$$

kanoninis polinomo $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ skaidinys virš $\mathbf{C}$. Tada $\dim V = n_1+\cdots+n_s$. Charakteristinio polinomo $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ šaknys $\lambda_1,...,\lambda_s$ vadinamos **tikrinėmis reikšmėmis**. Pasirinkime kurią nors iš jų, sakykime $\lambda=\lambda_1$, ir nagrinėkime poerdvių seką:

$$0=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^0\subset\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^1\subset\cdots\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^m\,,$$

čia $\mathcal{I}-$ tapatusis(vienetinis) operatorius, o m yra mažiausias toks natūralusis skaičius, kad teisinga lygybė

$$\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^m=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{m+1}\,.$$

Vektorinis poerdvis $K_\lambda=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^m$ vadinamas šakniniu poerdviu, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ. Tokiu būdu turime šakninius poerdvius, atitinkančius visas tikrines operatoriaus $\mathcal{A}$ reikšmes: $K_{\lambda_1},...,K_{\lambda_s}$

Teorema.1) $V=K_{\lambda_1}\oplus...\oplus K_{\lambda_s}$.
2) *Minimalusis operatoriaus* $\mathcal{A}$ *polinomas* $m_{\mathcal{A}}(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$.
Be įrodymo.

Tegu $U-$ vienas iš šakninių poerdvių, atitinkančių tikrinę reikšmę λ, o operatorius $\mathcal{A}$ nagrinėjamas kaip operatorius erdvėje U. Tegu $\mathcal{B}=\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$ ir $U_i=\ker\mathcal{B}^i$.

Teiginys. *Tegu* $i\geq 2$ *ir vektoriai* $v_1,...,v_r\in U_i$ *ir yra tiesiškai nepriklausomi* U_{i-1} *atžvilgiu. Tada vektoriai* $\mathcal{B}v_1,...,\mathcal{B}v_r\in U_{i-1}$ *ir yra tiesiškai nepriklausomi* U_{i-2} *atžvilgiu.*
Be įrodymo.

Šio teiginio pagalba sukonstruosime U bazę. Tegu $v_{11},...,v_{1r_1}$ yra $U=U_m$ bazė U_{m-1} atžvilgiu. Tada iš teiginio turime, kad $\mathcal{B}v_{11},...,\mathcal{B}v_{1r_1}$ priklauso U_{m-1}

ir yra tiesiškai nepriklausomi U_{i-2} atžvilgiu. Papildykime šią sistemą iki U_{m-1} bazės U_{i-2} atžvilgiu: $\mathcal{B}v_{11}, ..., \mathcal{B}v_{1r_1}, v_{21}, ..., v_{2r_2}$. Tada iš Tada iš teiginio turime, kad $\mathcal{B}^2v_{11}, ..., \mathcal{B}^2v_{1r_1}, \mathcal{B}v_{21}, ..., \mathcal{B}v_{2r_2}$ priklauso U_{m-2} ir yra tiesiškai nepriklausomi U_{i-3} atžvilgiu. Tęsdami šį procesą gausime U bazę :

$$\begin{array}{lllllllllll}
U_m & v_{11} & \cdots & v_{1r_1} & & & & & & & \\
U_{m-1} & \mathcal{B}v_{11} & \cdots & \mathcal{B}v_{1r_1} & v_{21} & \cdots & v_{2r_2} & & & & \\
U_{m-2} & \mathcal{B}^2v_{11} & \cdots & \mathcal{B}^2v_{1r_1} & \mathcal{B}v_{21} & \cdots & \mathcal{B}v_{2r_2} & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
U_1 & \mathcal{B}^{m-1}v_{11} & \cdots & \mathcal{B}^{m-1}v_{1r_1} & \mathcal{B}^{m-2}v_{21} & \cdots & \mathcal{B}^{m-2}v_{2r_2} & \cdots & v_{m1} & \cdots & v_{mr_m}
\end{array} \qquad (*)$$

Suskaidykime šią bazę "bokštais", t.y vektorių, esančių viename stulpelyje, sistemomis: $B_{11} = \{v_{11,}\mathcal{B}v_{11}, ...\mathcal{B}^{m-1}v_{11}\}$ ir t.t. Matome, kad poerdvis generuotas "bokštu" $v, \mathcal{B}v, ..., \mathcal{B}^{r-1}v$ (ir $\mathcal{B}^r v = 0$) yra ciklinis poerdvis, generuotas vektoriumi v. Turime, kad

$$U = B_{11} \oplus \cdots \oplus B_{mr_m}.$$

Operatoriaus $\mathcal{B}$ matrica cikliniame "bokštiniame" poerdvyje $[v, \mathcal{B}v, ..., \mathcal{B}^{r-1}v]$, $\mathcal{B}^r v = 0$, yra

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} r \text{ eilučių.}$$

Operatoriaus $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \lambda\mathcal{I}$ matrica cikliniame "bokštiniame" poerdvyje $[v, \mathcal{B}v, ..., \mathcal{B}^{r-1}v]$, $\mathcal{B}^r v = 0$, yra

$$J_r(\lambda) = \left.\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}\right\} r \text{ eilučių.}$$

Ši matrica vadinama $r-$ osios eilės Žordano bloku, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica visoje vektorinėje erdvėje taip parinktoje bazėje, kurią dar vadina Žordano baze, yra;

$$
\begin{pmatrix}
J(\lambda_1) & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & J(\lambda_1) & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & J(\lambda_s) & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & J(\lambda_s)
\end{pmatrix}
$$

įstrižainėje- Žordano blokai, visose kitose vietose- 0.

Kaip praktiškai surasti Žordano bazę šakniniame poerdvyje K_λ?

Tegu $A-$ operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica standartinėje bazėje.

1. Surandame operatoriaus matricos $B = A - \lambda I$ minimalųjĮ polinomą $m(t) = (t-\lambda)^m$. Čia m yra toks mažiausias skaičius, kad rankB^m =rankB^{m+1}.

2. Randame homogeninės tiesinių lygčių sistemos $B^m x = 0$ fundamentaliąją sprendinių sistemą $S = \{v_1, ..., v_n\}$, čia $n = \dim K_\lambda$. Iš šių vektorių išrenkame tuos, kuriems $B^{m-1}v_i \neq 0$. Tai ir bus vektoriai $v_{11}, ..., v_{1k_1}$. Jų pagalba konstruojami "bokštai" $\langle v_{11}\rangle = [v_{11}, Bv_{11}, ..., B^{m-1}v_{11}]\,; ...; \langle v_{1r_1}\rangle = [v_{1r_1}, Bv_{1r_1}, ..., B^{m-1}v_{1r_1}]$.

3. Iš sistemos S išrenkame tuos vektorius, kuriems $B^{m-2}v_i \neq 0$ ir nepriklauso $\langle v_{11}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{1k_1}\rangle$. tai bus vektoriai $v_{21}, ..., v_{2r_2}$. Jų pagalba konstruojami "bokštai" $\langle v_{21}\rangle = [v_{21}, Bv_{21}, ..., B^{m-2}v_{21}]\,; ...; \langle v_{2r_2}\rangle = [v_{2r_2}, Bv_{2r_2}, ..., B^{m-2}v_{2r_2}]$.

ir t.t.

Matricos Žordano formą galima rasti ir neieškant Žordano bazės. Reikia žinoti tik kiek ir kokio matavimo Žordano blokų yra matricoje. Parodysime kaip tuos skaičius gauti.

Tegu s_i =rank$(A-\lambda I)^i$, $i = 1, ..., m$. Tada $\dim U_i = n - s_i$ ir todėl lentelės $(*)$ viršutinėje eilutėje yra $n - s_m - (n - s_{m-1}) = s_{m-1} - s_m$ vektorius, antroje iš viršaus eilutėje yra $n - s_{m-1} - (n - s_{m-2}) = s_{m-2} - s_{m-1}$ vektoriai ,...,antroje eilutėje iš apačios yra $n - s_2 - (n - s_1) = s_1 - s_2$ vektorius, apatinėje eilutėje yra $n - s_1$ vektorius . Tada m- ačių "bokštų" yra $k_m = s_{m-1} - s_m$, $(m-1)-$ ačių "bokštų" yra $k_{m-1} = (s_{m-2} - s_{m-1}) - (s_{m-1} - s_m) = s_{m-2} - 2s_{m-1} + s_m, ...,$ 1-mačių "bokštų" yra $k_1 = (n - s_1) - (s_1 - s_2) = n - 2s_1 + s_2$. Bendru atveju

$$k_i = s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1}, i = 1, ..., m$$

ir $s_{m+1} = s_m, s_0 = n$.

Gavome, kad i- osios eilės Žordano blokų $J_i(\lambda)$ matricoje bus k_i.

Šakniniai poerdviai.

Pavyzdys.

Tegu operatoriaus $\mathcal{A} : \mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_4$ matrica standartinėje bazėje yra

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 7 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Operatoriaus charakteristinis polinomas yra

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x-1)^2 (x-2)^2,$$

Operatoriaus tikrinės reikšmės yra: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

$$\underline{\text{Šakninis poerdvis } \ker (A - 1 \cdot I)^2}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 7 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} t_1 \\ t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker (A - I) = \left\langle \left(-\tfrac{3}{2}, 1, 0, 0 \right) \right\rangle.$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker (A - I)^2 = \left\langle \left(-\tfrac{3}{2}, 1, 0, 0 \right), (0, 1, 0, 0) \right\rangle \supset \ker (A - I).$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad

$$\ker (A - I)^3 = \ker (A - I)^2 .$$

Taigi, šakninis poerdvis atitinkantis tikrinę reikšmę 1, yra dvimatis poerdvis ir minimalusis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas šiame poerdvyje yra $f_1(x) = (x-1)^2$. Tikrinės reikšmės $\lambda_1 = 1$ aukštis yra lygus 2.

Šakninis poerdvis $\ker (A - 2 \cdot I)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 7 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 5 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 5 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}t_1 + 6t_2 \end{pmatrix}$$

$$\ker (A - 2I) = \left\langle \left(-\tfrac{3}{2}, 1, 0, \tfrac{1}{2}\right), (0, 0, 1, 6) \right\rangle .$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -9 & 18 & -3 \\ 4 & 5 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sprendinys yra : } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}t_1 + 6t_2 \end{pmatrix}$$

Matome, kad

$$\ker (A - 2I)^2 = \ker (A - 2I) .$$

Taigi, šakninis poerdvis atitinkantis tikrinę reikšmę 1, yra dvimatis poerdvis ir minimalusis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas šiame poerdvyje yra $f_1(x) = (x-2)$. Tikrinės reikšmės $\lambda_2 = 2$ aukštis yra lygus 1.

Visa vektorinė erdvė $\mathbf{R}_4$ yra savo šakninių poerdvių tiesioginė suma:

$$\mathbf{R}_4 = \ker (A - 1 \cdot I)^2 \oplus \ker (A - 2 \cdot I)$$

Matricos Jordano forma ir Jordano bazė.

Pavyzdys.

Tegu duota matrica A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -12 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 4 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Jos charakteristinis polinomas : $x^8 - 32x^7 + 448x^6 - 3584x^5 + 17920x^4 - 57344x^3 + 114688x^2 - 131072x + 65536 = (x-4)^8$

Matricos tikrinė reikšmė yra viena $\lambda = 4$, todėl visa vektorinė erdvė yra šakninis poerdvis.

Apibrėžiame matricą $B = A - 4I$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Nagrinėsime poerdvius $0 = \ker B^0 \subset \ker B \subset \ker B^2 \subset \ldots$ ir rasime jų bazes.

$\underline{\ker B}$

Sprendžiame lygčių sistemą $BX = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemos bendrasis sprendinys yra : $\begin{pmatrix} t_1 \\ -4t_2 \\ t_2 \\ -2t_4 \\ -2t_1 \\ -2t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, $t_i \in \mathbf{C}$.

Matome , kad $\dim \ker B = 4$. Poerdvio bazė yra vektoriai

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\ker B^2}$

Lygčių sistemos sprendimas $B^2X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sistemos bendrasis sprendinys yra : } \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ -2t_1 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{pmatrix}, t_i \in \mathbf{C}.$$

Matome , kad $\dim\ker B^2 = 7$. Poerdvio bazė yra

$$u_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_{25} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{26} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{27} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rasime vektorius ,kurie poerdvio $\ker B$ bazę $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$ papildo iki poerdvio $\ker B^2$ bazės.

Nagrinėsime matricos$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & x & y & z \end{pmatrix}$,

čia $x, y, z \in \{u_{2j}, j = 1, ..., 7\}$, rangą:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 5 \; ; \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6 \; ;$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 7.$$

Taigi vektoriai $u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – tiesiškai nepriklausomi $\ker B$ atžvilgiu.

$\underline{\ker B^3}$

Lygčių sistemos sprendimas $B^3X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -1 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 8 & -16 & 16 & -16 & 4 & 40 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 9 & -9 & 2 & \frac{41}{2} & 0 & -18 \\ -4 & 8 & -8 & 8 & -2 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemos bendrasis sprendinys yra : $\begin{pmatrix} t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_5 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}, t_i \in \mathbf{C}.$

Matome, kad $\dim \ker B^3 = 8$, taigi $\ker B^3 = V$.

Rasime vektorių, kuris poerdvio $\ker B^2$ bazę $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{22}, u_{23}, u_{24}$ papildo iki visos erdvės bazės.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8.$$

Taigi vektorius $u_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – tiesiškai nepriklausomas $\ker B^2$ atžvilgiu.

Turime Jordano bazės sudarymo lentelę:

$V = \ker B^3$	v_1				- bazė poerdvio $\ker B^2$ atžvilgiu
$\ker B^2$	Bv_1	v_2	v_3		- bazė poerdvio $\ker B$ atžvilgiu
$\ker B$	B^2v_1	Bv_2	Bv_3	v_4	- $\ker B$ bazė

$$v_1 = u_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ Bv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vektoriai v_2 ir v_3 turi papildyti sistemą, sudarytos iš poerdvio ker B kokios nors bazės(sakykime $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$) ir vektoriaus Bv_1, iki poerdvio ker B^2 bazės. Nagrinėsime matricą $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & Bv_1 \end{pmatrix}$ ir rasime vektorių iš u_{21}, u_{22}, u_{23}, kurį pašalinus, matricos rangas lieka maksimalus, t.y. lygus 7.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 7.$$

Taigi $v_2 = u_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = u_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Turime

$$B^2v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \\ 32 \\ 0 \\ -4 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix}, Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 16 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}, Bv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -16 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Surasime v_4. Šis vektorius papildo tikrinių vektorių poerdvio vektorų sistemą B^2v_1, Bv_2, Bv_3 iki bazės.Vektoriaus v_4 ieškosime tarp poerdvio $\ker B$ bazinių vektorių $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 32 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 16 & 9 & -9 & 1 \\ -16 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 4, \text{ todėl } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matricos A Jordano matrica rastoje Jordano bazėje yra

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matricos A Jordano bazė:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \\ 32 \\ 0 \\ -4 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 16 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -16 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matricos Jordano forma.Pavyzdys.

Tegu duota matrica $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Matricos charakteristinis polinomas: $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256 = (x-4)^4$.

Matricos tikrinė reikšmė yra viena $\lambda = 4$.

Rasime matricos A Jordano formą, remdamiesi $j-$ osios eilės Jordano blokų skaičiaus formule

$$k_j = 2s_j - s_{j+1} - s_{j-1},$$

čia $s_i = \dim \ker (A - \lambda I)^i = n - \mathrm{rank}(A - \lambda I)^i$.

Turime

$\mathrm{rank}(A - 4I)^0 = 4$, $\mathrm{rank}(A - 4I)^1 = 1$, $\mathrm{rank}(A - 4I)^2 = 0$,

todėl

$s_0 = 4 - 4 = 0$, $s_1 = 4 - 1 = 3, s_2 = 4 - 0 = 4$, ir $s_i = 4, i \geq 3$.

Tada

$$\begin{aligned} k_1 &= 2s_1 - s_2 - s_0 = 2, \\ k_2 &= 2s_2 - s_3 - s_1 = 1, \\ k_3 &= 2s_3 - s_4 - s_2 = 0, \\ k_i &= 0 \text{ su visais } i \geq 4. \end{aligned}$$

Gavome, kad matrica A turi *du* 1- osios eilės ir *vieną* 2- osios eilės Jordano blokus, atitinkančius tikrinę reikšmę 4.

Matricos A Jordano forma yra

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$