13 Paskaita

OPERATORIAUS KANONINĖS MATRICOS IR BAZĖS.

Tegu $\mathcal{A}$ - operatorius vektorinėje erdvėje V. Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinio polinomo $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ kanininis skaidinys yra

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{n_1}(t) \cdots p_s^{n_k}(t)$, o operatoriaus $\mathcal{A}$ minimaliojo polinomo $f(t)$ kanoninis skaidinys yra $f(t) = p_1^{m_1}(t) \cdots p_s^{m_k}(t)$, čia $1 \leq m_i \leq n_i$ su visais $i = 1, ..., k$. Žinome, kad vektorinė erdvė V yra primariųjų poerdvių tiesioginė suma:

$$V = \ker p_1^{m_1}(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus \ker p_s^{m_k}(\mathcal{A}).$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica šių primariųjų poerdvių bazių sąjungoje yra

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ O & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

čia A_i- operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica poerdvyje $\ker p_i^{m_i}(\mathcal{A})$ su visais $i = 1, ..., k$.

Kiekvienas primarusis poerdvis $\ker p_i^{m_i}(\mathcal{A})$ yra ciklinių primariųjų poerdvių tiesioginė suma:

$$\ker p_i^{m_i}(\mathcal{A}) = \langle v_{i1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{ik_i} \rangle,$$

čia $v_{i1}, ..., v_{ik_i}-$ generuojantys ciklinius poerdvius vektoriai su visais i.

Tegu operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas poerdvyje $\langle v_{ij} \rangle$ yra $p_i^{m_{ij}}(t)$ su visais $j = 1, ..., k_i$. Turime, kad $m_i = \max(m_{i1}, ..., m_{ik_i})$ ir $n_i = m_{i1} + \cdots + m_{ik_i}$.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica cikliniame poerdvyje $\langle v_{ij} \rangle$ yra polinomo $p_i^{m_{ij}}(t)$ lydinčioji matrica F_{ij} (Frobeniuso matrica). Tada operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica visame primariąjame poerdvyje yra

$$A_i = \begin{pmatrix} F_{i1} & \cdots & O \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ O & \cdots & F_{ik_i} \end{pmatrix},$$

o visoje vektorinėje erdvėje V yra

$$A=\left(\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline F_{11} & \cdots & O \\ \hline \dots & \ddots & \dots \\ \hline O & \cdots & F_{1k_1} \\ \hline \end{array} & & \boxed{O} \\
\dots & \ddots & \dots \\
\boxed{O} & & \begin{array}{|c|c|c|}\hline F_{s1} & \cdots & O \\ \hline \dots & \ddots & \dots \\ \hline O & \cdots & F_{sk_s} \\ \hline \end{array}
\end{array}\right).$$

Šią matricos formą vadina *normaline Frobeniuso forma.* Šios formos pagrindiniai blokai - tai operatoriaus charakteristinio polinomo kaniniame skaidinyje esančių neredukuojamų polinomų laipsnių $p_i^{m_{ij}}(t)$ lydinčiosios matricos. Parodysime, kaip parinkti cikliniame poerdvyje $\langle v_{ij}\rangle$ bazę, kad operatoriaus matricos pagrindiniais blokais būtų pačio neredukuojamo $p_i(t)$ lydinčioji matrica. Ši matricos forma labiau atspindės ciklinio poerdvio $\langle v_{ij}\rangle$ struktūrą.

Tegu operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis (o taip pat ir charakteristinis) polinomas cikliniame poerdvyje $\langle v_{ij}\rangle$ yra $p_i^{m_{ij}}(t)$ ir $\deg p_i(t)=s_i$. Kalbame apie tokią ciklinio poerdvio $\langle v_{ij}\rangle$ bazę:

$u_1=v_{ij}, u_2=\mathcal{A}v_{ij}, ..., u_{s_i}=\mathcal{A}^{s_i-1}v_{ij},$
$u_{s_i+1}=p_i(\mathcal{A})\,v_{ij}, u_{s_i+2}=\mathcal{A}p_i(\mathcal{A})\,v_{ij}, ..., u_{2s_i}=\mathcal{A}^{s_i-1}p_i(\mathcal{A})\,v_{ij},$
$u_{2s_i+1}=p_i^2(\mathcal{A})\,v_{ij}, u_{2s_i+2}=\mathcal{A}p_i^2(\mathcal{A})\,v_{ij}, ..., u_{3s_i}=\mathcal{A}^{s_i-1}p_i^2(\mathcal{A})\,v_{ij},$
$\dots$
$u_{(m_{ij}-1)\cdot s_i+1}=p_i^{m_{ij}-1}(\mathcal{A})\,v_{ij}, ..., u_{m_{ij}\cdot s_i}=\mathcal{A}^{s_i-1}p_i^{m_{ij}-1}(\mathcal{A})\,v_{ij}.$

Jeigu polinomas $p_i(t)=t^{s_i}+a_{s_i-1}t^{s_i-1}+\cdots+a_0$, tai
$\mathcal{A}(u_{s_i})=u_{s_i+1}-a_{s_i-1}u_{s_i}-a_{s_i-2}u_{s_i-1}-\cdots-a_0u_1,$
$\mathcal{A}(u_{2s_i})=u_{2s_i+1}-a_{s_i-1}u_{2s_i}-a_{s_i-2}u_{2s_i-1}-\cdots-a_0u_{s_i+1},$
....
$\mathcal{A}\left(u_{m_{ij}\cdot s_i}\right)=-a_{s_i-1}u_{m_{ij}\cdot s_i}-a_{s_i-2}u_{m_{ij}\cdot s_i-1}-\cdots-a_0u_{(m_{ij}-1)s_i+1},$
ir $\mathcal{A}(u_i)=u_{i+1}$ su visais i, nesidalijančiais iš s_i.

Šioje bazėje operatoriaus matrica cikliniame poerdvyje $\langle v_{ij}\rangle$ yra

$$F_i = \begin{pmatrix} \boxed{F_{ij}} & & & & \\ 1 & \boxed{F_{ij}} & & & \\ & 1 & \boxed{F_{ij}} & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & \boxed{F_{ij}} \end{pmatrix},$$

čia $\boxed{F_{ij}}$ - polinomo $p_i(t)$ lydinčioji matrica(Frobeniuso matrica).
Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica visoje erdvėje V taip parinktų bazių sąjungoje yra

$$A = \begin{pmatrix} F_1 & \cdots & O \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ O & \cdots & F_s \end{pmatrix}.$$

Šis operatoriaus matricos pavidalas vadinamas *Frobeniuso -Jordano forma.*

Operatoriaus matricos Frobeniuso ir Frobeniuso-Jordano formų ir bazių pavyzdys.

Tegu operatoriaus $\mathcal{A} : \mathbf{R}_8 \to \mathbf{R}_8$ matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas yra lygus

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1.$$

Šio polinomo kanoninis skaidinys virš realiųjų skaičių kūno yra

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^4.$$

Charakteristinis polinomas yra neredukuojamo polinomo $x^2 + x + 1$ laipsnis, todėl visa vektorinė erdvė $\mathbf{R}_8$ yra primarusis poerdvis.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas $f(x)$ yra charakteristinio polinomo daliklis, todėl

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^s,$$

čia $1 \leq s \leq 4$. Rasime šį polinomą.

Aritmetinėje erdvėje $\mathbf{R}_8$ išrinkime standartinę bazę $e_1, e_2, ..., e_8$ ir nagrinėkime operatoriaus $\mathcal{A}$ ir jo laipsnių vaizdus šioje bazėje.

Bazinio vektoriaus $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vaizdai:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0\\2&-2&0&1&0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{4}{3}&0&-1&0&0&\frac{1}{3}&0\\2&0&3&-1&0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&0&0&4&-1&0&0\\0&4&0&-3&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&6&0&0&0&-2&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\\frac{2}{3}\\-2\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$A^3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0\\2&-2&0&1&0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{4}{3}&0&-1&0&0&\frac{1}{3}&0\\2&0&3&-1&0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&0&0&4&-1&0&0\\0&4&0&-3&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&6&0&0&0&-2&-1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A^4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0\\2&-2&0&1&0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{4}{3}&0&-1&0&0&\frac{1}{3}&0\\2&0&3&-1&0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&0&0&4&-1&0&0\\0&4&0&-3&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&6&0&0&0&-2&-1\end{pmatrix}^4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\-2\\0\\0\\-6\\0\end{pmatrix}.$$

Vektorių sistema $e_1, Ae_1, A^2e_1, A^3e_1, A^4e_1$ - tiesiškai priklausoma:

$$e_1+2Ae_1+3A^2e_1+2A^3e_1+A^4e_1=(0,0,0,0,0,0,0,0)^T.$$

Vektoriaus e_1 minimalusis anuliatorius yra $f_{e_1}(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.
Vektoriaus e_1 ciklinis poerdvis $\langle e_1\rangle$ yra tiesinis apvalkalas $[e_1, Ae_1, A^2e_1, A^3e_1]$.
Operatorius $\mathcal{A}$ matrica šiame cikliniame poerdvyje yra polinomo $f_{e_1}(x)$ lydinčioji matrica(Frobeniusio matrica): $\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&-2\\0&1&0&-3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$.

Vektorius $e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yra vienas iš ciklinio poerdvio $\langle e_1 \rangle$ tiesioginio papildinio bazės vektorių. Jo vaizdai yra:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorių sistema e_5, Ae_5, A^2e_5 - tiesiškai priklausoma:

$$e_5 + Ae_5 + A^2e_5 = (0,0,0,0,0,0,0)^T.$$

Vektoriaus e_5 minimalusis anuliatorius $f_{e_5}(x) = x^2 + x + 1$.
Vektoriaus e_5 ciklinis poerdvis $\langle e_5 \rangle$ yra tiesinis apvalkalas $[e_5, Ae_5]$.

Operatorius $\mathcal{A}$ matrica šiame cikliniame poerdvyje yra polinomo $f_{e_5}(x)$ lydinčioji matrica(Frobeniusio matrica): $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Vektorius $e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yra vienas iš poerdvio $\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_5 \rangle$ tiesioginio papildinio bazės vektorių. Jo vaizdai yra:

$$Ae_6 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2e_6 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorių e_6, Ae_6, A^2e_6 yra tiesiškai priklausoma:

$$e_6 + Ae_6 + A^2e_6 = (0,0,0,0,0,0,0,0)^T .$$

Vektoriaus e_6 minimalusis anuliatorius $f_{e_6}(x) = x^2 + x + 1$.

Operatorius $\mathcal{A}$ matrica šiame cikliniame poerdvyje yra polinomo $f_{e_6}(x)$ lydinčioji matrica(Frobeniusio matrica): $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Gavome, kad visa vektorinė erdvė $\mathbf{R}_8$ yra primariųjų ciklinių poerdvių tiesioginė suma: $\mathbf{R}_8 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle \oplus \langle e_6 \rangle$.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas yra polinomų

$$f_{e_1}(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1,\ f_{e_4}(x) = f_{e_6}(x) = x^2 + x + 1$$

mažiausias bendras kartotinis. Bet $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)^2$, todėl MBK$(f_{e_1}, f_{e_4}, f_{e_6}) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)^2$ - operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas. Taigi, erdvė $\mathbf{R}_8-$ primarioji.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica bazėje $e_1, Ae_1, A^2e_1, A^3e_1, e_4, Ae_4, e_6, Ae_6$ yra

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Tai operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *Frobeniuso forma.*

Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas yra $\left(x^2 + x + 1\right)^2 = p^2(x)$. Operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos *Frobeniuso-Jordano forma* - tai operatoriaus matrica bazėje

$$\begin{gathered} u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8 : \\ u_1 = e_1, u_2 = Ae_1, \\ u_3 = p(A)\,e_1 = \left(A^2 + A + I\right)e_1, u_4 = Ap(A)\,e_1 = \left(A^3 + A^2 + A\right)e_1, \\ u_5 = e_4, u_6 = Ae_4, \\ u_7 = e_6, u_8 = Ae_6. \end{gathered}$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica šioje bazėje yra

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Operatoriaus matricos Frobeniuso-Žordano formos pavyzdys.
Tegu operatoriaus $\mathcal{A}:\mathbf{R}_8 \to \mathbf{R}_8$ matrica yra

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas yra lygus

$$\chi_{\mathcal{A}}(x)=x^8+4x^7+10x^6+16x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x+1.$$

Šio polinomo kanoninis skaidinys virš realiųjų skaičių kūno yra

$$\chi_{\mathcal{A}}(x)=\left(x^2+x+1\right)^4.$$

Charakteristinis polinomas yra neredukuojamo polinomo x^2+x+1 laipsnis, todėl visa vektorinė erdvė $\mathbf{R}_8$ yra primarusis poerdvis.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas $f(x)$ yra charakteristinio polinomo daliklis, todėl

$$f(x)=\left(x^2+x+1\right)^s,$$

čia $1\le s\le 4$. Rasime šį polinomą.

Norint rasti matricos A kanoninę Frobeniuso-Žordano formą, nebūtina ieškoti Frobeniuso-Žordano bazės. Pakanka suskaičiuoti sekoje

$$0=\ker f^0(\mathcal{A})\subset\ker f^1(\mathcal{A})\subset\cdots\subset\ker f^s(\mathcal{A})=\ker f^{s+1}(\mathcal{A})$$

esančių poerdvių dimensijas:

$$s_i=\dim\ker f^i(\mathcal{A})=n-\mathrm{rank} f^i(A),$$

$i = 1, 2, ..., s$; $n = 8$
ir pasinaudoti $j-$ osios eilės Frobeniuso-Žordano blokų skaičiaus k_j formule:

$$k_j = \frac{2s_j - s_{j+1} - s_{j-1}}{d},$$

čia $d = \deg f(x) = 2$.
Maple pagalba turime
$s_0 = 0$;

$$\text{rank}(A^2 + A + I) = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

ir $s_1 = 8 - \text{rank}(A^2 + A + I) = 8 - 2 = 6$;

$$\text{rank}(A^2 + A + I)^2 = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ir $s_2 = 8 - \text{rank}(A^2 + A + I)^2 = 8 - 0 = 8$.
Taigi $s_0 = 0, s_1 = 6, s_2 = 8, s_i = 8$ su visais $i \geq 3$. Tada

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{2\cdot 6 - 8 - 0}{2} = 2,\\
k_2 &= \frac{2\cdot 8 - 8 - 6}{2} = 1,\\
k_3 &= \frac{2\cdot 8 - 8 - 8}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matricos Frobeniuso-Žordano formoje yra du pirmos ir vienas antros eilės Frobeniuso-Žordano blokai:

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1}
\end{pmatrix}.
$$