12 paskaita

TIESINIAI OPERATORIAI.

Apibrėžimas. *Tiesinis atvaizdis $\mathcal{A}: V \to V$ vadinamas tiesiniu operatoriumi vektorinėje erdvėje V.*

Tegu $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ - tiesiniai operatoriai erdvėje V. Tada teisingos lygybės:

1. $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$.
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$.
3. $\exists \mathcal{O} : \mathcal{A} + \mathcal{O} = \mathcal{A}$. Čia $\mathcal{O}(v) = 0 \in V$.
4. $\forall \mathcal{A} \, \exists (-\mathcal{A}) : \mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.
5. $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$.
6. $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$.
7. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$.
8. $\exists \mathcal{E} : \mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{A}$, $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Čia $\mathcal{E}(v) = v$.
9. $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}$.
10. $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$.
11. $1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$.
12. $(\lambda\mu)\mathcal{A} = \lambda(\mu\mathcal{A})$.

Operatoriai vektorinėje erdvėje V sudaro algebrinę struktūrą - *algebrą* .

Operatoriaus $\mathcal{A}$ natūralusis laipsnis apibrėžiamas induktyviai:

$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{i+1} = (\mathcal{A}^i)\mathcal{A}$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Jeigu $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, tai $f(\mathcal{A}) = a_n \mathcal{A}^n + \cdots + a_1 \mathcal{A} + a_0 \mathcal{E}$. Pastebėsime, kad $\mathcal{A}(f(\mathcal{A})) = f(\mathcal{A})(\mathcal{A}) = a_n \mathcal{A}^{n+1} + a_{n-1}\mathcal{A}^n \cdots + a_1 \mathcal{A}^2 + a_0 \mathcal{A}$.

Apibrėžimas. *Komutatyvi grupė G vadinama moduliu virš žiedo A (arba tiesiog - A - moduliu), jeigu apibrėžta sandauga $g \cdot a$, čia $g \in G, a \in A$ ir išpildytos sąlygos:*

1) $(g_1 + g_2) \cdot a = g_1 \cdot a + g_2 \cdot a$;

2) $g \cdot (a_1 + a_2) = g \cdot a_1 + g \cdot a_2$;

3) $(g_1 g_2) \cdot a = g_1 (g_2 \cdot a)$;

4) $1_G \cdot a = a$.

Vektorinė erdvė V , kurioje apibrėžtas operatorius $\mathcal{A}$, tampa $k[x]$ moduliu :

Jeigu $f \in k[x]$, tai $fv := f(\mathcal{A})(v)$ ir

1) $(f + g)v = (f + g)(\mathcal{A}) = (f(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A}))v = f(\mathcal{A})v + g(\mathcal{A})v = f(v) + g(v)$.

2) $f(v_1 + v_2) = f(\mathcal{A})(v_1 + v_2) = f(\mathcal{A})v_1 + f(\mathcal{A})v_2 = fv_1 + fv_2$.

3) $(fg)v = (fg)(\mathcal{A})v = (f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))v = f(\mathcal{A})(g(\mathcal{A})v) = f(\mathcal{A})(gv) = f(g)v$.

4) $1_{k[x]}v = 1_{k[x]}(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = v$.

Koks tiesinio operatoriaus $\mathcal{A} : V \to V$ matricos paprasčiausias pavidalas? Dabar bazių parinkimo laisvė nėra tokia didelė kaip tiesinio atvaizdžio atveju: vektorinėje erdvėje tenka rinktis vieną bazę. Norint surasti tą vektorinės erdvės bazę, kurioje tiesinio operatoriaus matrica turi paprasčiausią pavidalą, teks nagrinėti ypatingus V poerdvius.Pastebėsime, kad visos operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica turi pavidalą $C^{-1}AC$, čia $A-$ operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica kurioje nors bazėje, o $C-$ neišsigimusi keitimo matrica, todėl visų šių matricų charakteristiniai polinomai yra lygūs. Šis polinomas vadinamas operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristiniu polinomu.

Invariantiniai poerdviai.

Apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{A} : V \to V$ - tiesinis operatorius. Perdvis $U \subseteq V$ vadinamas invariantiniu poerdviu, jeigu $\mathcal{A}u \in U$ su visais $u \in U$.*

Tegu $u_1, ..., u_m-$ invariantinio poerdvio U bazė. Papildykime šiuos tiesiškai nepriklausomus vektorius iki visos vektorinės erdvės V bazės: $u_1, ..., u_m, v_{m+1}, ..., v_n$. Tada operatoriaus $\mathcal{A}$ vaizdai šioje bazėje yra

$\mathcal{A}(u_1) = a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m$

...

$\mathcal{A}(u_m) = a_{1m}u_1 + \cdots + a_{mm}u_m$

$\mathcal{A}(v_{m+1}) = a_{1,m+1}u_1 + \cdots + a_{m,m+1}u_m + a_{m+1,m+1}v_{m+1} + \cdots + a_{n,m+1}v_n$

...

$\mathcal{A}(v_n) = a_{1,n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m + a_{m+1,n}v_{m+1} + \cdots + a_{nn}v_n$,

t,y.

$$\mathcal{A}(u_1, ..., u_m, v_{m+1}, ..., v_n) =$$

$$(u_1, ..., u_m, v_{m+1}, ..., v_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

čia A_1- operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica invariantiniame poerdvyje U (vadiname operatoriaus $\mathcal{A}$ siauriniu invariantiniame poerdvyje U ir žymime $\mathcal{A}|_U$):

$\mathcal{A}|_U(u_1, ..., u_m) = (u_1, ..., u_m)\, A_1.$

Turime

$\mathcal{A}(v_{m+1}) \equiv a_{m+1,m+1}v_{m+1} + \cdots + a_{n,m+1}v_n \,(\mathrm{mod}\, U)$

...

$\mathcal{A}(v_n) \equiv a_{m+1,n}v_{m+1} + \cdots + a_{nn}v_n \,(\mathrm{mod}\, U),$

todėl A_2 yra operatoriaus $\bar{\mathcal{A}}$: $V/U \to V/U$ matrica(operatorius $\bar{\mathcal{A}}$ vadinamas indukuotu faktorerdvėje operatoriumi). Šis operatorius apibrėžiamas formule $\bar{\mathcal{A}}(\bar{v}) = \overline{\mathcal{A}(v)}$, t.y. $\bar{\mathcal{A}}(v + U) = \mathcal{A}(v) + U$. Apibrėžimas yra korektiškas, nes jeigu $v_1 \equiv v_2 \,(\mathrm{mod}\, U)$, t.y. $v_1 - v_2 \in U$, tai $\mathcal{A}(v_1 - v_2) \in U$ ir $\mathcal{A}(v_1) \equiv \mathcal{A}(v_2)\,(\mathrm{mod}\, U)$.

Teorema. *Tegu $\mathcal{A}$ - operatorius vektorinėje erdvėje V, o $U-$ invariantinis V poerdvis. Tada charakteristinis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}|_U}(t) \cdot \chi_{\bar{\mathcal{A}}}(t)$.*

Įrodymas. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(tI_n - A) = \det\begin{pmatrix} tI_m - A_1 & B \\ O & tI_{n-m} - A_2 \end{pmatrix} =$

$= \det(tI_m - A_1) \cdot \det(tI_{n-m} - A_2) = \chi_{\mathcal{A}|_U}(t) \cdot \chi_{\bar{\mathcal{A}}}(t).$

Įrodyta.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica supaprastėja, jeigu vektorinė erdvė V yra invariantinių poerdvių tiesioginė suma: $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$. Apjungę invariantinių poerdvių U_i bazes, turėtume V bazę. Operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica šioje bazėje yra $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ O & \cdots & A_k \end{pmatrix}$, čia $A_1, ..., A_k$ yra operatoriaus $\mathcal{A}$ siaurinių invariantiniuose poerdviuose $U_1, ..., U_k$ matricos.

Norint supaprastinti operatoriaus matricą stengsimes, kiek tai įmanoma, vektorinę erdvę skaidyti invariantinių poerdvių tiesiogine suma.

Dabar pateiksime pirmuosius invariantinių poerdvių pavyzdžius.

Teorema. *Tegu $\mathcal{A}$ - operatorius vektorinėje erdvėje V virš kūno k , o polinomas $f(x) \in k[x]$. Poerdviai* $\ker f(\mathcal{A})$ ir $\mathrm{im} f(\mathcal{A})$ *yra invarintiniai V poerdviai.*

Įrodymas. Tegu $v \in \ker f(\mathcal{A})$, t.y. $f(\mathcal{A})(v) = 0$. Tada $f(\mathcal{A})(\mathcal{A}(v)) = \mathcal{A}(f(\mathcal{A})(v)) = \mathcal{A}(0) = 0$ ir $\mathcal{A}(v) \in \ker \mathcal{A}$. Gavome, kad $\ker f(\mathcal{A})$ yra invariantinis V poerdvis.

Tegu $v \in imf(\mathcal{A})$, t.y. $v = f(\mathcal{A})(u)$, čia $u \in V$. Tada $\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(f(\mathcal{A})(u)) = f(\mathcal{A})(\mathcal{A}(u))$, t.y. $\mathcal{A}(v) \in imf(\mathcal{A})$. Gavome, kad $imf(\mathcal{A})$ yra invariantinis V poerdvis.

Įrodyta.

Cilkinis poerdvis ir minimalusis anuliatorius.

Dabar sukonstruosime paprasčiausią invariantinį V poerdvį.

Tegu $v \in V$. Vektorių $v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ...$ sekoje parinkime tiesiškai nepriklausomą vektorių sistemą $v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v)$ taip, kad vektorių sistema $v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v), \mathcal{A}^k(v)$ jau būtų tiesiškai priklausoma. Tada

$\mathcal{A}^k(v) = -a_0 v - a_1\mathcal{A}(v) - a_2\mathcal{A}^2(v) - \cdots - a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(v)$,

arba $f(\mathcal{A})(v) = 0$, čia $f(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + a_{k-2}t^{k-2} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + a_0$.

Vektorių $v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v)$ tiesinis apvalkalas

$P = \left[v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v)\right]$ yra invariantinis V poerdvis. Jeigu $v \in P$, tai $v = b_0v + b_1\mathcal{A}(v) + \cdots + b_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(v)$ ir $\mathcal{A}(v) = b_0\mathcal{A}(v) + b_1\mathcal{A}^2(v) + \cdots + b_{k-2}\mathcal{A}^{k-1}(v) + b_{k-1}\mathcal{A}^k(v) =$

$= b_0\mathcal{A}(v) + b_1\mathcal{A}^2(v) + \cdots + b_{k-2}\mathcal{A}^{k-1}(v) +$

$+b_{k-1}\left(-a_0v - a_1\mathcal{A}(v) - a_2\mathcal{A}^2(v) - \cdots - a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(v)\right) \in P$.

Bet kuris invariantinis V poerdvis poerdvis U, kuriame yra vektorius v, turi taip pat ir vektorius $\mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v)$, t.y. $U \supseteq P$. Gavome, kad P yra mažiausias invariantinis poerdvis, turintis vektorių v.

Apibrėžimas. *Mažiausias invariantinis poerdvis turintis vektorių v vadinamas cikliniu poerdviu, generuojamu vektoriumi v, ir žymimas $\langle v \rangle$.*

Apibrėžimas. *Polinomas $g(t)$ vadinamas vektoriaus v anuliatoriumi, jeigu $g(\mathcal{A})(v) = 0$.*

Polinomas $f(t)$ yra mažiausio laipsnio ir vienintėlis šio laipsnio unitarusis vektoriaus v anuliatorius. Tikrai, jeigu $c_0 + c_1t + \cdots + c_{k-1}t^{k-1}$ yra vektoriaus v anuliatorius, tai $c_0v + c_1\mathcal{A}(v) + \cdots + c_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(v) = 0$. Tai teisinga tik tada, kai $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$, nes $v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v)-$ tiesiškai nepriklausoma sistema.

Apibrėžimas. *Mažiausio laipsnio vektoriaus v anuliatorius vadinamas vektoriaus v minimaliuoju anuliatoriumi.*

Teorema. *Vektoriaus v bet kuris anuliatorius dalijasi iš vektoriaus v minimalaus anuliatoriaus.*

Įrodymas. Tegu $g(t)-$ vektoriaus v anuliatorius, o $f(t)-$ minimalisis vektoriaus v anuliatorius. Padalykime polinomą $g(t)$ iš polinomo $f(t)$ su liekana: $g(t)=q(t)f(t)+r(t)$, čia $\deg r(t)<\deg f(t)$. Tada $g(\mathcal{A})=q(\mathcal{A})f(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})$ ir $g(\mathcal{A})(v)=q(\mathcal{A})(f(\mathcal{A})(v))+r(\mathcal{A})(v)=r(\mathcal{A})(v)=0$. Bet $f(t)-$ minimalaus laipsnio vektoriaus v anuliatorius, todėl $r(t)\equiv 0$.

Įrodyta.

Operatoriaus matrica cikliniame poerdvyje ir jos charakteristinis polinomas.

Tegu $\mathcal{A}:V\to V$ - operatorius vektorinėje erdvėje, o $P=\langle v\rangle-$ ciklinis poerdvis, generuojamas vektoriumi v, kurio minimalusis anuliatorius yra polinomas $f(t)=t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\cdots+a_1t+a_0$. Viena iš poerdvio P bazių - tai vektorių $v,\mathcal{A}(v),\mathcal{A}^2(v),...,\mathcal{A}^{k-1}(v)$ sistema. Šios sistemos vaizdai operatoriaus atžvilgiu yra

$$\begin{array}{rccccc}
\mathcal{A}(v)= & & \mathcal{A}(v) & & & \\
\mathcal{A}(\mathcal{A}(v))= & & & \mathcal{A}^2(v) & & \\
\cdots & & & & & \\
\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{k-2}(v)\right)= & & & & & \mathcal{A}^{k-1}(v) \\
\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{k-1}(v)\right)= & -a_0- & a_1\mathcal{A}(v)- & a_2\mathcal{A}^2(v)- & \cdots & -a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(v)
\end{array}$$

ir operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica šioje bazėje yra

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas. *Matrica A vadinama polinomo $f(t)$ lydinčiąja matrica.*

Teiginys. *Operatorius $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas cikliniame poerdvyje $\langle v\rangle$ yra lygus vektoriaus v minimaliąjam anuliatoriui: $\chi_{\mathcal{A}|_{\langle v\rangle}}(t)=f(t)$.*

Įrodymas. Operatorius $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas cikliniame poerdvyje $\langle v\rangle$ yra lygus

$$\chi_{\mathcal{A}|_{\langle v\rangle}}(t)=\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0\\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{k-1}\end{pmatrix}.$$

Prie determinanto pirmosiosios eilutės pridėkime antrąją, padaugintą iš t, trečiąją, padaugintą iš $t^2, ...,$ paskutiniąją, padaugintą iš t^{k-1}. Gausime

$$\chi_{\mathcal{A}|_{\langle v\rangle}}(t)=\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & f(t)\\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{k-1}\end{pmatrix}\overset{*}{=}$$

$$(-1)^{k+1}f(t)\det\begin{pmatrix} -1 & t & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}=(-1)^{k+1}(-1)^{k-1}f(t)=f(t).$$

Lygybėje $\overset{*}{=}$ determinantą skleidžiame paskutiniuoju stulpeliu.
Įrodyta.

Išvada. Operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristinis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ visoje vektorinėje erdvėje V dalijasi iš kiekvieno vektoriaus minimaliojo anuliatoriaus, t.y. šis polinomas yra kiekvieno vektoriaus anuliatorius ir todėl operatorius $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ yra nulinis operatorius erdvėje $V : \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=O$. Šis faktas dar vadinamas *Cayley- Hamilton'o teorema.* Šios teoremos matricinis pavidalas yra toks: *kiekviena kvadratinė matrica yra savo charakteristinio polinomo šaknimi:* $\chi_A(A)=0$.

Operatoriaus minimalusis polinomas ir primarusis poerdvis.

Tegu $\mathcal{A}: V\to V$ - operatorius erdvėje V, vektoriai $v_1, ..., v_n-$ vektorinės erdvės V bazė, o $f_1(t), ..., f_n(t)$ - šių vektorių minimalieji anuliatoriai. Tegu polinomas $f(t)$ yra polinomų $f_1(t), ..., f_n(t)$ mažiausias bendras kartotinis:
$f(t)=$MBK$(f_1(t), ..., f_n(t))$.
Operatorius $f(\mathcal{A})=O$, nes
$f(\mathcal{A})(a_1v_1+\cdots a_nv_n)=a_1f(\mathcal{A})(v_1)+\cdots+a_nf(\mathcal{A})(v_n)=0,$

čia $a_1v_1 + \cdots a_nv_n-$ bet kuris V vektorius.

Polinomas $f(t)$ yra mažiausio laipsnio polinomas, pasižymintis šia savybe: tai patikriname, taikydami dalumo su liekana teoremą polinomams ir mažiausio bendro kartotinio apibrėžimo.

Apibrėžimas. *Polinomas $f(t)$ vadinamas minimaliuoju operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomu.*

Minimalųjį operatoriaus polinomą galime gauti ir kitaip. Tegu vektorinė erdvė V yra lygi savo poerdvių $U_1, ..., U_k$ sumai(nebutinai tiesioginei): $V = U_1 + \cdots + U_k$. Tada operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas yra lygus mažiausiam bendram minimaliųjų operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomų poerdviuose $U_1, ..., U_k$ dalikliui:

$f_{\mathcal{A}}(t) = \text{BMK}\left(f_{\mathcal{A}|U_1}(t), ..., f_{\mathcal{A}|U_k}(t)\right).$

Iš Cayley-Hamiltono teoremos žinome, kad operatoriaus $\mathcal{A}$ charakterstinis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ yra operatoriaus $\mathcal{A}$ anuliatorius: $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = O$. Todėl minimalusis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas yra charaktristinio polinomo daliklis.

Prisiminkime, kad minimalusis operatoriaus polinomas ciklinėje vektorinėje erdvėje sutampa su charakteristiniu polinomu. Tokio operatoriaus matrica yra Frobeniuso matrica. Mes parodysime, kaip vektorinę erdvę suskaidyti ciklinių poerdvių tiesiogine suma.

Apibrėžimas. *Vektorinė erdvė V virš kūno k su operatoriumi $\mathcal{A}$ vadinama primariąja, jeigu minimalusis operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomas šioje erdvėje yra neredukuojamo virš k polinomo laipsnis.*

Vektorinę erdvę V galime suskaidyti primariųjų invariantinių poerdvių tiesiogine suma.

Teorema. *Tegu $f(t)-$ operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalusis polinomas vektorinėje erdvėje V ir $f(t) = p_1^{m_1}(t) \cdots p_k^{m_k}(t)-$ polinomo $f(t)$ kanonins skaidinys. Tada vektrorinė erdvė V yra primariųjų invariantinių poerdvių $P_1 = \ker p_1^{m_1}(\mathcal{A}), ...,$ $P_k = \ker p_k^{m_k}(\mathcal{A})$ tiesioginė suma: $V = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$. Operatoriaus $\mathcal{A}$ minimalūs plonomai poerdviuose $P_1, ..., P_k$ yra lygūs atitinkamai $p_1^{m_1}(t), ..., p_k^{m_k}(t)$.*

Be įrodymo.

Teorema. *Primarioji vektorinė erdvė yra lygi ciklinių primariųjų poerdvių tiesioginei sumai.*

Paaiškinsime kaip tokį skaidinį gauti.

Tegu V - primarioji erdvė operatoriaus $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ atžvilgiu ir $p^m(t)-$ minimalusis operatoriaus polinomas erdvėje V, čia $p(t)-$ neredukuojamas $s-$ ojo laipsnio polinomas. Tegu $v_1, v_2, ..., v_n-$ V bazė ir $p^{m_1}(t), p^{m_2}(t), ..., p^{m_n}(t)-$ minimalūs šių bazinių vektorių anuliatoriai.

Žinome, kad $p^m(t) = \text{MBK}(p^{m_1}(t), p^{m_2}(t), ..., p^{m_n}(t))$, todėl egzistuoja toks bazinis vektorius, kurio minimalusis anuliatorius sutampa su minimaliuoju operatoriaus $\mathcal{A}$ polinomu, sakykim tai vektorius $v_1 : p^{m_1}(t) = p^m(t)$ ir $m_1 = m$. Papildykime ciklinio primariojo poerdvio, generuotą vektoriumi v_1 :

$$\langle v_1 \rangle = [v_1, \mathcal{A}(v_1), \mathcal{A}^2(v_1), ..., \mathcal{A}^{sm-1}(v_1)]$$

bazę iki visos erdvės bazės: $v_1, \mathcal{A}(v_1), \mathcal{A}^2(v_1), ..., \mathcal{A}^{sm-1}(v_1), v'_{sm}, ..., v'_n$ taip, kad

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus [v'_{sm}, ..., v'_n].$$

Poerdvis $V_1 = [v'_{sm}, ..., v'_n]$ - vėl primarusis ir tęsdami tai ką atlikome vektorinei erdvei V gausime erdvės V_1 ciklinį primarųjį poerdvį $\langle v'_2 \rangle$. Randame šio poerdvio tiesioginį papildinį $V_2 : V_1 = \langle v'_2 \rangle \oplus V_2$. Taip tęsdami gausime visos vektorinės erdvės V skaidinį primariųjų ciklinių poerdvių tiesiogine suma.

Teorema. *Ciklinės primariosios vektorinės erdvės V su operatoriumi $\mathcal{A}$ ir charkteristiniu polinomu $p^m(t)$ invariantiniai poerdviai yra $\mathcal{A}V, \mathcal{A}^2V, ..., \mathcal{A}^{m-1}V$, kurie sudaro mažėjančią eilutę:*

$$V \supset \mathcal{A}V \supset \mathcal{A}V \supset \cdots \supset \mathcal{A}^{m-1}V \supset \mathcal{A}^m V = 0.$$

Taigi, ciklinėje primarioje vektorinėje erdvėje jau nėra tiesioginių invariantinių dėmenų, t.y. šios vektorinės erdvės jau negalima sukaidyti invariantinių poerdvių tiesiogine suma.