

11 paskaita.

Tiesiniai atvaizdžiai.

Tiesinio atvaizdžio apibrėžimas, branduolys ir vaizdas.

Apibrėžimas. Tegu U ir V - vektorinės erdvės virš kūno k .

Funkcija $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ vadinama *tiesiniu atvaizdžiu*, jeigu

1. $\mathcal{A}(u_1 + u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$ su visais $u_1, u_2 \in U$.
2. $\mathcal{A}(\alpha u) = \alpha \mathcal{A}(u)$ su visais $\alpha \in k$ ir $u \in U$.

Pastaba dėl terminų. Tuo atveju, kai $U = V$, tiesinį atvaizdį vadina tiesiniu operatoriumi. Transformacijomis (tiesinėmis transformacijomis) vadina ir tiesinius atvaizdžius ir tiesinius operatorius tuo atveju kai iš konteksto aišku apie ką kalbama.

Pavyzdžiai. 1. Trimatės erdvės *judesiai* : *centrinė simetrija, ašinė simetrija, veidrodinė simetrija, lygiagretusis postūmis* ,- yra tiesiniai trimatės erdvės atvaizdžiai.

2. Tegu $R[0, 1]$ yra realiųjų tolydžių funkcijų vektorinė erdvė. Funkcija $\mathcal{A}(f) = f(0)$ yra tiesinis atvaizdis.

3. Tegu $R_n[x]$ polinomų, kurių laipsnis neviršija n , vektorinė erdvė. Diferencijavimo funkcija $\mathcal{D}(f) = f'$ yra tiesinis atvaizdis.

Teiginys. Tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ savybės:

1. $\mathcal{A}(0) = 0$.
2. Jeigu u_1, \dots, u_n yra tiesiškai priklausoma U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), \dots, \mathcal{A}(u_n)$ yra tiesiškai priklausoma V sistema.
3. Jeigu u_1, \dots, u_n yra generuojanti U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), \dots, \mathcal{A}(u_n)$ yra generuojanti $\mathcal{A}(U)$ sistema.

Įrodyti paliekama studentams□

Apibrėžimai. Tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ *branduoliu* vadinama U aibė

$$\ker \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0\}.$$

Tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ *vaizdu* vadinama V aibė

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = \{v \in V \mid \exists u \in U : \mathcal{A}u = v\}.$$

Jeigu $\ker \mathcal{A} = 0$, tai \mathcal{A} vadinamas *injektyviuoju tiesiniu atvaizdžiu* (*monomorfizmu*).

Jeigu $\operatorname{im} \mathcal{A} = V$, tai \mathcal{A} vadinamas *siurektyviuoju tiesiniu atvaizdžiu* (*epimorfizmu*).

Jeigu $\ker \mathcal{A} = 0$ ir $\operatorname{im} \mathcal{A} = V$, tai \mathcal{A} vadinamas *bijektyviuoju tiesiniu atvaizdžiu* (*izomorfizmu*).

Examples.

1. Let \mathcal{P} be the projection of \mathbf{R}^2 on a line L from \mathbf{R}^2 .

Then the *kernel* of \mathcal{P} is the set of all vectors in \mathbf{R}^2 which are perpendicular to L and the *image* of \mathcal{P} is the set of all vectors parallel to L . Indeed, the vectors which are perpendicular to L and only these vectors are annihilated by the projection. This proves the statement about the kernel. The projection on L of every vector is parallel to L (by the definition of projection) and conversely, every vector which is parallel to L is the projection of some vector from \mathbf{R}^2 , for example, it is the projection of itself. This proves the statement about the image.

2. Let \mathcal{R} be the rotation of \mathbf{R}^2 through angle $\frac{\pi}{3}$; counterclockwise.

Then the *kernel* of \mathcal{R} is 0 (no non-zero vectors are annihilated by the rotation). The *image* of the rotation is the whole \mathbf{R}^2 . Indeed, for every vector w in \mathbf{R}^2 let v be the vector obtained by rotating w through angle $\frac{\pi}{3}$; clockwise. Then w is the result of rotating v through $\frac{\pi}{3}$ counterclockwise, thus w is in the range of our transformation. Since w was an arbitrary vector in \mathbf{R}^2 , the range of the rotation is the whole \mathbf{R}^2 .

3. Let $\mathcal{R}\mathcal{F}$ be the reflection of \mathbf{R}^2 about a line L .

Then the *kernel* of $\mathcal{R}\mathcal{F}$ is 0. Indeed, no non-zero vectors are annihilated by the reflection. The *image* is the whole \mathbf{R}^2 (prove it!).

4. Let \mathcal{Z} be the zero transformation from V to W which takes every vector in V to the zero of W .

Then the *kernel* of \mathcal{Z} is V and the *image* is 0 (prove it!).

5. Let \mathcal{D} be the linear operator of the vector space of $P[x]$ polynomials which takes every polynomial to its derivative.

Then the *image* of \mathcal{D} is the whole $P[x]$ (every polynomial is a derivative of another polynomial) and the *kernel* of \mathcal{D} is the set of all constants (prove it!).

6. Let \mathcal{I} be the linear operator on the space $P[x]$ of polynomials which takes every polynomial $g(x)$ to the polynomial $\int_0^x g(t)dt$. Then the *image* of \mathcal{I} is the set of all polynomials $h(x)$ such that $h(0) = 0$ (every such polynomial is the image under \mathcal{I} of its derivative) and the kernel of \mathcal{I} is 0 (the only function with 0 anti-derivative is 0).

7. Let \mathcal{T} be the linear transformation from the space of all n by n matrices $M_{n \times n}(\mathbf{R})$ to \mathbf{R} which takes every matrix to its *trace*.

Then the *image* of \mathcal{T} is the whole \mathbf{R} (every number is the trace of some matrix) and the *kernel* consists of all n by n matrices with zero trace.

Theorem. *Let \mathcal{A} be a linear transformation from U to V . Then $\ker \mathcal{A}$ is a subspace of U and $\text{im} \mathcal{A}$ is a subspace of V .*

Proof. We need to prove that $\ker \mathcal{A}$ is closed under addition and scalar multiplication. Let u_1 and u_2 be elements from $\ker \mathcal{A}$. Then $\mathcal{A}(u_1) = 0$ and $\mathcal{A}(u_2) = 0$ (the definition of a kernel). Hence $\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2) = 0 + 0 = 0$. But \mathcal{A} is a linear transformation, so $\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2) = \mathcal{A}(u_1 + u_2)$. Hence $\mathcal{A}(u_1 + u_2) = 0$. By the definition of a kernel this implies that $u_1 + u_2$ is in $\ker \mathcal{A}$. Thus $\ker \mathcal{A}$ is closed under taking sums.

Now let u be an element of $\ker \mathcal{A}$ and let a be a number. Since u is in $\ker \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(u) = 0$. Then $a\mathcal{A}(u) = au = 0$ (prove the last equality!). On the other hand, since \mathcal{A} is a linear transformation, $a\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(au)$. So $\mathcal{A}(au) = 0$, whence au is in $\ker \mathcal{A}$. This shows that $\ker \mathcal{A}$ is closed under scalar multiplication.

The proof that $\text{im} \mathcal{A}$ is a subspace is left as an exercise.

Theorem. *Every subspace of a vector space is a kernel of some linear transformation and the image of some other linear transformation.*

Įrodymas. Tegū U yra vektorinės erdvės V poerdvis ir vektorių sistema u_1, \dots, u_k - poerdvio U bazė. Papildykime šią sistemą iki vektorinės erdvės V bazės: $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$. Turime, kad $U = [u_1, \dots, u_k]$ ir tiesinis apvalkalas $[v_{k+1}, \dots, v_n]$ poerdvio U tiesioginis papildinys: $V = U \oplus [v_{k+1}, \dots, v_n]$.

Tiesiniis atvaizdžius $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \rightarrow V$ apibrėžkime formulėmis

$$\mathcal{A}(a_1u_1 + \dots + a_ku_k + a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n) = a_1u_1 + \dots + a_ku_k,$$

$\mathcal{B}(a_1u_1 + \dots + a_ku_k + a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n) = a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n$.
Tada $\ker \mathcal{A} = [v_{k+1}, \dots, v_n]$, $\text{im} \mathcal{A} = U$ ir $\ker \mathcal{B} = U$, $\text{im} \mathcal{B} = [v_{k+1}, \dots, v_n]$.
Įrodyta.

Example. Let E be the subspace of \mathbf{R}^3 consisting of vectors which are parallel to a plane P . Then E is *the kernel* of the projection of \mathbf{R}^3 on the line perpendicular to the plane and E is *the image* of the projection on the plane P .

The theorem about kernel and images implies the following important property of homogeneous systems of linear equations.

Theorem. Let $Av = 0$ be a homogeneous systems of linear equations with n unknowns and m equations. Then the set of solutions of this system coincides with the kernel of the linear transformation \mathcal{A} from \mathbf{R}^n to \mathbf{R}^m with standard matrix A and so it is a subspace of \mathbf{R}^n .

Indeed the set of solutions of the system $Av = 0$ is precisely the set of vectors annihilated by the linear transformation \mathcal{A} .

Izomorfizmy teoremos.

Teorema apie izomorfizmą. Tegu $\mathcal{A} : U \rightarrow V \Leftrightarrow$ tiesinis atvaizdis. Poerdvis $\text{im} \mathcal{A}$ izomorfinis faktorerdvei $U / \ker \mathcal{A}$.

Įrodymas. Apibrėžkime funkciją $i : U / \ker \mathcal{A} \rightarrow \text{im} \mathcal{A}$ formule $i(\bar{u}) = \mathcal{A}(u)$. Parodysime, kad tai ir yra ieškomas izomorfizmas.

Funkcija i yra tiesinis atvaizdis:

$$i(a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2) = i(\overline{a_1u_1 + a_2u_2}) = \mathcal{A}(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1\mathcal{A}(u_1) + a_2\mathcal{A}(u_2) = a_1i(\bar{u}_1) + a_2i(\bar{u}_2).$$

Tiesinis atvaizdis i yra monomorfizmas:

$$i(\bar{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \ker \mathcal{A} \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}.$$

Tiesinis atvaizdis i yra epimorfizmas:

su kiekvienu $v \in \text{im} \mathcal{A}$ egzistuoja $u \in U$, kad $\mathcal{A}(u) = v$, t.y. $i(\bar{u}) = \mathcal{A}(u) = v$.

Įrodyta.

Teorema apie izomorfizmą dažnai reiškiamą tokia komutatyvia diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\
 \searrow p & & \nearrow i \\
 & U/\ker \mathcal{A} &
 \end{array}
 ,$$

čia $p(u) = \bar{u}$, $i(\bar{u}) = \mathcal{A}(u)$, taigi, $\mathcal{A}(u) = i(p(u))$.

Pastaba. Paskutiniųjų teoremų dėka matome, kaip galėtume mąstyti faktor-erdvę. Kiekvienam vektorinės erdvės poerdviui galime apibrėžti tiesinį atvaizdį, kurio vaizdas yra šis poerdvis, o branduolys - poerdvio tiesioginis papildinys. Pagal teoremą apie izomorfizmą faktorerdvę galime mąstyti kaip poerdvio tiesioginį papildinį.

Teorema. *Vektorinė erdvė U , k , $\dim U = n$, yra izomorfinė aritmetinei erdvei k_n .*

Įrodymas. Tegų vektorių sistema $v_1, \dots, v_n \Leftrightarrow$ vektorinės erdvės U bazė.

Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $\mathcal{A} : k_n \rightarrow U$ formule

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

$\text{im } \mathcal{A} = U$, nes sistema $v_1, \dots, v_n \Leftrightarrow$ generuojanti erdvę U sistema.

$\ker \mathcal{A} = 0$, nes sistema $v_1, \dots, v_n \Leftrightarrow$ tiesiškai nepriklausoma sistema.

Gavome, kad U yra izomorfinė aritmetinei erdvei k_n .

Įrodyta.

Pastaba. $U \approx k_n$, bet šis izomorfizmas nėra kanoninis,- jis priklauso nuo bazių.

Paskutinioji teorema rodo, kad baigtinės dimensijos vektorinę erdvę galima

reikšti aritmetinės erdvės elementais, t.y. stulpeliais: $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Tiesinio atvaizdžio matricos.

Dabar parodysime kaip reikšti tiesinį atvaizdį $\mathcal{A} : U \rightarrow V$. Tuo pačiu realizuosime šią diagramą:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{A} & V \\
 i_U \downarrow & & \downarrow i_V \\
 k_n & \xrightarrow{A} & k_m
 \end{array}$$

Tegu $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ - tiesinis atvaizdis, o u_1, \dots, u_n U bazė, v_1, \dots, v_m V bazė. Tada

$$\begin{aligned}
 Au_1 &= a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m \\
 &\vdots \\
 Au_n &= a_{1n}v_1 + \dots + a_{mn}v_m
 \end{aligned}$$

Matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ vadinama tiesinio atvaizdžio \mathcal{A} matrica duotų matricų atžvilgiu. Turime

$$\mathcal{A}(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_m) A.$$

Matrica A apibrėžta vienareikšmiškai.

Koks ryšys tarp vektoriaus ir jo tiesinio vaizdo koordinačių?

$$\text{Tegu } \mathcal{A}u = v, \text{ čia } u = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, v = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Turime

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(u) &= \mathcal{A} \left((u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \right) = (\mathcal{A}(u_1, \dots, u_n)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \\
 &= ((v_1, \dots, v_m) A) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_m) \left(A \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Tada } \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Kaip keičiasi tiesinio atvaizdžio matrica keičiantis vektorinių erdvių matricoms?

Tegu C ir D bazių keitimo matricos:

$$(u'_1, \dots, u'_n) = (u_1, \dots, u_n) \cdot C,$$

$$(v'_1, \dots, v'_m) = (v_1, \dots, v_m) \cdot D.$$

Tada, jeigu $\mathcal{A}(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_m) A$ ir $\mathcal{A}(u'_1, \dots, u'_n) = (v'_1, \dots, v'_m) A'$, tai

$$A' = D^{-1}AC.$$

Pastaba. $\text{rank} A' = \text{rank} A$.

Įrodymas.◇

Kaip parinkti bazes vektorinėse erdvėse U ir V , kad tiesinio atvaizdžio \mathcal{A} matrica A būtų parasčiausia?

Teorema. Tegu $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ - tiesinis atvaizdis. Tada egzistuoja bazės vektorinėse erdvėse U ir V , kad tiesinio atvaizdžio \mathcal{A} matrica A yra

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times n-r} \\ 0_{m-r \times r} & 0_{m-r \times n-r} \end{pmatrix}.$$

Įrodymas.[.....]

Veiksmai su tiesiniais atvaizdžiais.

Apibrėžimas. Tegu $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$ - tiesiniai atvaizdžiai. Jų suma vadiname funkciją :

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(u) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u).$$

Teiginys. Tiesinių atvaizdžių suma - tiesinis atvaizdis.

Įrodymas.◇

Apibrėžimas. Tegu $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ - tiesinis atvaizdis, o $\alpha \in k$. Tada $\alpha\mathcal{A} : U \rightarrow V$ apibrėžiama

$$(\alpha\mathcal{A})(u) = \alpha(\mathcal{A}(u)).$$

Teiginys. Jeigu \mathcal{A} - tiesinis atvaizdis, tai $\alpha\mathcal{A}$ - tiesinis atvaizdis.

Įrodymas.◇

Apibrėžimas. Tegu $\mathcal{A} : V \rightarrow W$, $\mathcal{B} : U \rightarrow V$ - tiesiniai atvaizdžiai. Šių tiesinių atvaizdžių sandauga $\mathcal{A}\mathcal{B} : U \rightarrow W$ vadinsime funkciją:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(u) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(u)).$$

Teiginys. \mathcal{AB} - tiesinis atvaizdis.

Uždavinys. Tegu U, V, W - trys vektorinės erdvės virš to pačio kūno k , o $\{u_i\}$ - bazė erdvėje U , $\{v_j\}$ - bazė erdvėje V , $\{w_k\}$ - bazė erdvėje W . Tegu $\mathcal{B}, \mathcal{C} : U \rightarrow V$, o $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ tiesiniai atvaizdžiai ir $\alpha \in k$. Tegu B, C yra tiesinių atvaizdžių \mathcal{B}, \mathcal{C} matricos bazėse $\{u_i\}$ ir $\{v_j\}$, A - tiesinio atvaizdžio \mathcal{A} matrica bazėse $\{v_j\}$ ir $\{w_k\}$.

Irodykite, kad

$B + C$ yra $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ matrica bazėse $\{u_i\}, \{v_j\}$;

αB yra $\alpha \mathcal{B}$ matrica bazėse $\{u_i\}, \{v_j\}$;

AB yra \mathcal{AB} matrica bazėse $\{u_i\}, \{w_k\}$.