10 paskaita.
Euklido erdvės.

Apibrėžimas. *Vektorinė erdvė E virš realiųjų skaičių kūno vadinama Euklido erdve, jeigu joje apibrėžta skaliarinė sandauga, t.y. tokia funkcija, kuri vektorių porai $u, v \in E$ priskiria realųjį skaičių $(u, v) \in \mathbf{R}$ ir tenkina aksiomas:*
S1) $(u, v) = (v, u)$ *su visais* $u, v \in E$;
S2) $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$ *su visais* $u_1, u_2, v \in E$;
S3) $(au, v) = a\,(u, v)$ *su visais* $u, v \in E$ *ir* $a \in \mathbf{R}$;
S4) $(u, u) \geq 0$ *su visais* $u \in E$ *ir* $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Apibrėžimai.1. *Vektoriaus $v \in E$ ilgiu vadinamas neneigiamas skaičius*

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}\ .$$

2. Atstumu tarp vektorių u ir v vadinamas skaičius $d\,(u, v) = \|u \Leftrightarrow v\|$.

Teiginys. *Vektoriaus v ilgis $\|v\|$ tenkina šias savybes*:
N1) $\|v\| \geq 0$ ir $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
N2) $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ *su visais* $v \in E$ ir $a \in \mathbf{R}$.
N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *su visais* $u, v \in E$.
A1) $d\,(u, v) \geq 0$ ir $d\,(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
A2) $d\,(u, v) = d\,(v, u)$.
A3) $d\,(u, v) \leq d\,(u, w) + d\,(w, v)$ - trikampio nelygybė
Įrodymas. Savybės N1, N2,A1 ir A2 yra tiesioginės S1-S4 išvados. Savybės N3ir A3 įrodymas remiasi Cauchy-Schwarz nelygybe, kurią įrodysime žemiau.

Teorema(Cauchy-Schwarz-Buniakovskio nelygybė). *Euklido erdvėje E teisinga nelygybė*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

su visais $u, v \in E$.

Įrodymas. Nagrinėkime kvadratinę funkciją t atžvilgiu $f\,(t) = (u + tv, u + tv) = (u, u) + 2t\,(u, v) + t^2\,(v, v)$. Iš apibrėžimo turime, kad $f\,(t) \geq 0$ su visomis t reikšmėmis, todėl $D = \Leftrightarrow 4\,(v, v) \cdot (u, u) + 4\,(u, v)^2 \leq 0 \Rightarrow (u, v)^2 \leq (u, u)\,(v, v)$ ir $(u, v) \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Pastebėsime, kad $f(t) = 0 \Leftrightarrow (u+tv, u+tv) = 0 \Leftrightarrow u$ ir v yra tiesiškai priklausome sistema.

Įrodyta.

Apibrėžimas. *Euklido erdvėje apibrėžiama kampo tarp nenulinių vektorių u ir v sąvoka*:

$$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Pavyzdys. Aritmetinėje erdvėje $\mathbf{R}_n$ skaliarinė sandauga apibrėžiama lygybe: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Tada Cauchy-Schwarz-Buniakovskio nelygybė Euklido erdvėje yra žinoma skaitinė nelygybė

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

su visais realiais skaičiais $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$.

Apibrėžimas. 1.*Nenuliniai vektoriai u ir v vadinami ortogonaliais, jeigu* $(u,v) = 0$.

2. *Vektorius u vadinamas normuotu, jeigu $\|u\| = 1$.*

3. *Euklido erdvės bazė $e_1, e_2, ..., e_n$ vadinama ortogonalia, jeigu šie vektoriai yra poromis ortogonalūs, t.y. $(e_i, e_j) = 0$, kai $1 \leq i \neq j \leq n$, ir ortonormuota, jeigu beto vektoriai yra normuoti, t.y. $\|e_i\| = 1$ su visais i.*

Teiginys. *Jeigu nenulinių vektorių sistemos $e_1, e_2, ..., e_m$ vektoriai yra poromis ortogonalūs (vektorių sistema yra ortogonali), tai ši sistema yra tiesiškai nepriklausoma.*

Įrodymas. Tegu $e_1, e_2, ..., e_m$ yra ortogonali vektorių sistema. Nagrinėkime lygybę

$$a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m = 0.$$

Tada $(a_1 e_1 + \cdots a_m e_m, e_i) = a_1 (e_1, e_i) + \cdots + a_i (e_i, e_i) + \cdots + a_m (e_m, e_i) = a_i (e_i, e_i) = 0$ ir $a_i = 0$ su visais $i = 1, ..., m$.

Įrodyta.

Tegu $e_1, e_2, ..., e_n \Leftrightarrow$ ortogonalioji Euklido erdvės bazė, o $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$ ir $u = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j e_j$. Turime

$$(u, v) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \left(e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \left(e_i, e_i \right).$$

Jeigu , beto, $e_1, e_2, ..., e_n \Leftrightarrow$ ortonormuota Eukido erdvės bazė, tai

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Ar visada Euklido erdvėje egzistuoja ortogonali ir ortonormuota bazė ? Į šį klausimą teigiamai atsako

Teorema(J.P.Gram - E.Schmidt ortogonalizacijos procesas). *Euklido erdvės E kiekvienai tiesiškai nepriklausomai sistemai $u_1, u_2, ..., u_m$ egzistuoja veinareikšmiškai apibrėžta tokia vektorių sistema $v_1, v_2, ..., v_m$, kad*

1*) vektoriai $v_1, v_2, ..., v_m$ poromis ortogonalūs(t.y. sistema yra ortogonali);*

2*) $v_i \Leftrightarrow u_i \in [u_1, ..., u_{i-1}]$ su visais $2 \leq i \leq m$.*

Įrodymas. Indukcija pagal m. Kai $m = 1$, tai $v_1 = u_1$ ir teiginys įrodytas. Įrodysime indukcinį teiginį $m \Leftrightarrow 1 \Rightarrow m$. Pagal indukcijos prielaidą, vektorių $u_1, ..., u_{m-1}$ sistemai egzistuoja tokia ortogonali vektorių $v_1, ..., v_{m-1}$ sistema, kad $v_i \Leftrightarrow u_i \in [u_1, ..., u_{i-1}]$ *su visais* $2 \leq i \leq m \Leftrightarrow 1$. Pastebėsime, kad $[u_1, ..., u_{m-1}] = [v_1, ..., v_{m-1}]$, nes su visais $j = 1, 2, ..., m \Leftrightarrow 1$ vektoriai $v_i = u_i + (v_i \Leftrightarrow u_i) \in [u_1, ..., u_{m-1}]$ ir beto sistema $v_1, ..., v_{m-1}$ yra tiesiškai nepriklausoma ir todėl sudaro $[u_1, ..., u_{m-1}]$ bazę. Ieškomas vektorius v_m turi tenkinti šias savybes:

1) $(v_m, v_1) = \cdots = (v_m, v_{m-1}) = 0$

2) $v_m \Leftrightarrow u_m \in [u_1, ..., u_{m-1}] = [v_1, ..., v_{m-1}]$.

Taigi, vektorius v_m turėtų būti lygus $v_m = u_m + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{m-1} v_{m-1}$. Tada

$$0 = (v_m, v_1) = (u_m + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{m-1} v_{m-1}, v_1) =$$
$$(u_m, v_1) + \lambda_1 (v_1, v_1) \Rightarrow \lambda_1 = \Leftrightarrow \frac{(u_m, v_1)}{\|v_1\|^2} ,$$

$$\ldots,$$
$$0 = (v_m, v_{m-1}) = (u_m + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{m-1} v_{m-1}, v_{m-1}) =$$
$$(u_m, v_{m-1}) + \lambda_{m-11} (v_{m-11}, v_{m-11}) \Rightarrow \lambda_{m-11} = \Leftrightarrow \frac{(u_m, v_{m-1})}{\|v_{m-1}\|^2}.$$

Gavome, kad vektorius $v_m = u_m \Leftrightarrow \frac{(u_m, v_1)}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \frac{(u_m, v_{m-1})}{\|v_{m-1}\|^2} \cdot v_{m-1}$.
Įrodyta.

Pastaba. Iš Gramo-Schmidto ortogonalizacijos proceso turime, kad bet kurioje Euklido erdvėje egzistuoja ortogonali bazė, o jeigu jos vektorius dar ir normuoti, tai ir ortonormuota bazė.

Apibrėžimas. *Jeigu U yra Euklido erdvės E poerdvis, tai aibė*

$$U^{\perp} = \{v \in E : (v, u) \text{ su visais } u \in U\}$$

vadinama poerdvio U ortogonaliuoju papildiniu.
Svarbiausios **ortogonalaus papildinio savybės** yra šios:
1. $U^{\perp}$ yra E poerdvis.
2. Jeigu $u_1, ..., u_m$ yra U bazė, tai $U^{\perp} = \{v \in E | (v, u_i) = 0, i = 1, ..., m\}$.
3. $U \cap U^{\perp} = 0$.
4. $\dim U^{\perp} = \dim E \Leftrightarrow \dim U$.
5. $E = U \oplus U^{\perp}$.
6. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

Taikymai.
1. *Ortogonalusis papildinys ir tiesinių lygčių sistema.*
Teiginys. Tegu V yra Euklido erdvės $\mathbf{R}^n$ poerdvis, generuotas eilutėmis $v_1 = (a_{11}, ..., a_{1n}), ..., v_m = (a_{m1}, ..., a_{mn})$, ir $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$. Tada šios sąlygos yra ekvivalentiškos:
1) $v \in V^{\perp}$.
2) $(v, v_i) = 0$ su visais $i = 1, ..., m$.
3) $(x_1, ..., x_n)$ yra tiesinės lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sprendinys, t.y. $V^{\perp}$ yra šios sistemos sprendinių aibė.

2. *Tiesinių lygčių sistemos mažiausių kvadratų sprendinys.*

Tegu $Av = b$ yra tiesinių lygčių sistema, kurios matricoje A yra m eilučių ir n stulpelių, ir ji neturi sprendinių. Su kiekvienu $v \in \mathbf{R}_n$ vektorius $b \Leftrightarrow Av$ vadinamas *nesuderamumo vektoriumi.* Sistemos **mažiausių kvadratų sprendiniu** vadiname tokį vektorių v_0, kad vektoriaus $b \Leftrightarrow Av_0$ ilgis yra mažiausias, t.y. $\|b \Leftrightarrow Av_0\| = \min\limits_{v \in \mathbf{R}_n} \|b \Leftrightarrow Av\|$. Parodysime, kaip rasti šį sprendinį.

Tegu $v = (x_1, ..., x_n)^T$ ir $Av = x_1c_1 + \cdots x_nc_n$, čia $c_1, ..., c_n$ yra matricos A stulpeliai. Aišku, kad vektorių aibė $V = \{Av | v \in \mathbf{R}_n\} \subseteq \mathbf{R}_m$ yra poerdvis lygus matricos A stulpelių $c_1, ..., c_n$ tiesiniam apvalkalui $[c_1, ..., c_n]$. Vektoriaus u atstumu iki poerdvio V vadinamas $\min\limits_{w \in V} \|u \Leftrightarrow w\|$. Tegu $u = x + y$, čia $x \in V, y \in V^{\perp}$. Tada $\|u \Leftrightarrow w\|^2 = (x \Leftrightarrow w + y, x \Leftrightarrow w + y) = (x \Leftrightarrow w, x \Leftrightarrow w) + (y, y)$, nes $x \Leftrightarrow w$ ir y yra ortogonalūs. Aišku, kad minimumas pasiekiamas, kai $x = w$ ir lygus $(y, y) = \|y\|^2$. Gavome, kad vektoriaus u atstumas iki poerdvio V yra lygus vektoriaus u ortogonalios sudaromosios y ilgiui ir realizuojamas, kai w yra vektoriaus u ortogonalioji projekcija x.

Taigi vektorius v turi būti toks, kad Av būtų vektoriaus b ortogonalioji projekcija poerdvyje $V = \{Av | v \in \mathbf{R}_n\}$. Vektoriui v surasti naudosime tokią procedūrą:

1) Raskime ortonormuotą matricos A stulpelių $c_1, ..., c_n$ tiesinio apvalkalo $V = [c_1, ..., c_n]$ bazę.

2) Raskime vektoriaus b projekcija p poerdvyje V.

3) Išreikškite vektorių p stulpelių $c_1, ..., c_n$ tiesine kombinacija: $p = x_1c_1 + \cdots x_nc_n$. Tada $v = (x_1, ..., x_n)^T$ ir yra ieškomas vektorius.

Parodysime, kaip kitaip galima rasti mažiausių kvadratų sprendinį. Pastebėsime, kad v yra mažiausių kvadratų sprendinys sistemai $Av = b$ tada ir tik tada, kada $Av \Leftrightarrow b$ ortogonalus $V = [c_1, ..., c_n] \Leftrightarrow$matricos A stulpelių tiesiniam apvalkalui. Bet vektorius $z \in \mathbf{R}^n$ yra ortogonalus V tada ir tik tada, kada jis yra sistemos $A^T z = 0$ sprendinys, čia $A^T \Leftrightarrow$ transponuota A matrica. Taigi, v yra mažiausių kvadratų sprendinys sistemai $Av = b$ tada ir tik tada, kada v yra sistemos $A^T (Av \Leftrightarrow b) = 0$ sprendinys, t.y.

$$A^T Av = A^T b.$$

Gavome, kad sistemos $Av = b$ mažiausių kvadratų sprendinys yra sistemos $A^T Av = A^T b$ sprendinys.

3. *Gramo matrica.*

Apibrėžimas. Tegu $v_1, ..., v_n$ yra Euklido erdvės E vektorių sistema. Matrica

$$G_{(v_1,...,v_n)} = \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, (v_1, v_2, ..., v_n) \right) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \cdots & (v_1, v_n) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \cdots & (v_2, v_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (v_n, v_1) & (v_n, v_2) & \cdots & (v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

vadinama sistemos $v_1, ..., v_n$ Gramo matrica.

Pastaba.1. Vektorių sistema $v_1, ..., v_n$ yra tiesiškai nepriklausoma tata ir tik tada, kada sistemos Gramo matrica $G_{(v_1,...,v_n)}$ neišsigimusi, t.y. $\det G_{(v_1,...,v_n)} \neq 0$.

2. Iš apibrėžimo turime, kad bazė $v_1, ..., v_n$ yra ortonormuota tada ir tik tada, kada bazės $v_1, ..., v_n$ Gramo matrica yra vienetinė.

Tegu $v_1, ..., v_n$ yra Euklido erdvės E bazė ir $u, v \Leftrightarrow$ du E vektoriai:

$$u = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}^T (v_1, ..., v_n)^T \text{ ir } v = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tada skaliarinė sandauga

$$(u, v) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}^T (v_1, ..., v_n)^T, (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) =$$

$$\left((a_1, ..., a_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) =$$

$$(a_1, ..., a_n) \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, (v_1, ..., v_n) \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1, ..., a_n)\, G_{(v_1,...,v_n)} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Gramo matricos geometrinė prasmė.

Apibrėžimas.1. Tegu $u_1, ..., u_m$ yra Euklido erdvės E vektoriai. Aibė

$$P\left(u_1, ..., u_m\right) = \left\{a_1 u_1 + \cdots a_m u_m | 0 \leq a_i \leq 1, i = 1, ..., m\right\}$$

vadinama **gretasieniu.**

2. Gretasienio $P\left(u_1, ..., u_m\right)$ tūris $V_m\left(u_1, ..., u_m\right)$ yra apibrėžiamas induktyviai:

1) $V_1\left(u_1\right) = \|u_1\|$;

2) $V_m\left(u_1, ..., u_m\right) = V_{m-1}\left(u_1, ..., u_{m-1}\right) \cdot h$, čia $h \Leftrightarrow$ aukštinė, kuri yra lygi $h = \|v\|$, o vektorius v apibrėžiamas lygybėmis: $(v, u_1) = \cdots = (v, u_{m-1}) = 0$ ir $u_m \Leftrightarrow v \in \left[u_1, ..., u_{m-1}\right]$.

Parodysime, kad aukštinė h apibrėšta korektiškai. Tegu v_1 vektorius, tenkinantis sąlygas: $(v_1, u_1) = \cdots = (v_1, u_{m-1})$ ir $u_m \Leftrightarrow v_1 \in \left[u_1, ..., u_{m-1}\right]$. Tada $v \Leftrightarrow v_1 = (u_m \Leftrightarrow v_1) + (u_m \Leftrightarrow v) \in \left[u_1, ..., u_{m-1}\right]$, .t.y.

$$\begin{gathered} v \Leftrightarrow v_1 = a_1 u_1 + \cdots + a_{m-1} u_{m-1}, \\ (v \Leftrightarrow v_1, u_1) = \cdots = (v \Leftrightarrow v_1, u_{m-1}) = 0 \end{gathered}$$

ir $(v \Leftrightarrow v_1, a_1 u_1 + \cdots + a_{m-1} u_{m-1}) = 0 = (v \Leftrightarrow v_1, v \Leftrightarrow v_1) \Leftrightarrow v = v_1$.

Teorema. $\left(V_m\left(u_1, ..., u_m\right)\right)^2 = \det G_{(u_1, ..., u_m)}$.

Įrodymas. Indukcija pagal m.
Kai $m = 1$, tai $\left(V_1\left(u_1\right)\right)^2 = \|u_1\|^2 = (u_1, u_1) = \det\left((u_1, u_1)\right)$.
Įrodysime indukcinį teiginį $(m \Leftrightarrow 1 \Rightarrow m)$.
Tegu v yra aukštinės vektorius. Tada

$$\begin{gathered} u_m = a_1 u_1 + \cdots + a_{m-1} u_{m-1} + v, \\ (v, u_1) = \cdots = (v, u_{m-1}) = 0. \end{gathered}$$

Tada

$$\det G_{(u_1, ..., u_m)} =$$

$$\det \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & \cdots & (u_1, u_{m-1}) & (u_1, a_1 u_1 + \cdots + a_{m-1} u_{m-1} + v) \\ (u_2, u_1) & \cdots & (u_2, u_{m-1}) & (u_2, a_1 u_1 + \cdots + a_{m-1} u_{m-1} + v) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_m, u_1) & \cdots & (u_m, u_{m-1}) & (u_m, a_1 u_1 + \cdots + a_{m-1} u_{m-1} + v) \end{pmatrix}.$$

Atimkime iš paskutiniojo stulpelio pirmąjį stulpelį padaugintą iš a_1, antrąjį stulpelį padaugintą iš $a_2, ...,$ m-1 -ąjį stulpelį padaugintą iš a_{m-1}. Turėsime

$$\det G_{(u_1,...,u_m)} = \det \begin{pmatrix} (u_1,u_1) & \cdots & (u_1,u_{m-1}) & (u_1,v) \\ (u_2,u_1) & \cdots & (u_2,u_{m-1}) & (u_2,v) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_m,u_1) & \cdots & (u_m,u_{m-1}) & (u_m,v) \end{pmatrix} =$$
$$\det \begin{pmatrix} (u_1,u_1) & \cdots & (u_1,u_{m-1}) & 0 \\ (u_2,u_1) & \cdots & (u_2,u_{m-1}) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_m,u_1) & \cdots & (u_m,u_{m-1}) & (u_m,v) \end{pmatrix} =$$
$$\det G_{(u_1,...,u_{m-1})} \cdot (u_m,v) =$$
$$(V_{m-1}(u_1,...,u_{m-1}))^2 \cdot (a_1(u_1,v) + \cdots + a_{m-1}(u_{m-1},v) + (v,v)) =$$
$$(V_{m-1}(u_1,...,u_{m-1}))^2 \cdot (v,v) = (V_{m-1}(u_1,...,u_{m-1}))^2 \cdot h^2 = (V_m(u_1,...,u_m))^2 .$$

Įrodyta.