1. KVADRATINĖS FORMOS.

Apibrėžimas. *Tegu K - kūnas, o $K[x]$ - polinomų žiedas virš kūno K. Žinome, kad šis polinomų žiedas yra komutatyvus, asociatyvus žiedas su vienetu. Šio žiedo pagrindu galima sukonstruoti polinomų žiedą $K[x][y] = K[x,y]$ virš $K[x]$. Tai polinomų su dviem kintamaisiais x ir y žiedas virš kūno K. Panašiai konstruojant galima apibrėžti polinomų su n kintamųjų $x_1, ... x_n$ žiedą $K[x_1, ..., x_n]$.*

Apibrėžimas. *Polinomas $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ vadinamas kvadratine forma, jeigu*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{array}{c} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_1x_n + \\ \cdots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{array},$$

kai $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *vadinama kvadratinės formos f matrica.*

Ši matrica yra simetrinė: $A^T = A$.

Jeigu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, tai kvadratinę formą f galima reikšti taip: $f = X^T A X$.

Apibrėžimas. *Tegu turime du kintamųjų rinkinius: $x_1, x_2, ..., x_n$ ir $y_1, y_2, ..., y_n$. Antrasis kintamųjų rinkinys vadinamas pirmojo tiesiniu keitiniu, jeigu $x_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n$ su visais $i = 1, 2, ..., n$.*

Turime, kad $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = CY$.

Matrica C vadinama kintamųjų keitimo matrica.

Atlikus minėtą kintamųjų keitinį kvadratinėje formoje f, turėsime kvadratinę formą g:

$g(y_1, y_2, ..., y_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T \left(C^T A C\right) Y$, čia $\left(C^T A C\right)$ - vėl simetrinė matrica:

$\left(C^T A C\right)^T = C^T A^T \left(C^T\right)^T = C^T A^T C = C^T A C$.

Apibrėžimas. *Keitinys, kurio keitimo matrica yra neišsigimusi, vadinamas neišsigimusiu.*

Teorema 6. *Su kiekviena kvadratine forma egzistuoja neišsigimęs toks keitinys, kad naujoji kvadratinė forma yra lygi*

$$c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + \cdots + c_ny_n^2.$$

Šis kvadratinės formos pavidalas vadinamas *kanoniu pavidalu.*

Pastaba. Kai kalbame apie realiąją kvadratinę formą, tai teorama jau įrodyta.

Lema. *Neišsigimusiu kintamųjų keitiniu* <u>*nenulinę*</u> *kvadratinę formą galima suvesti prie kvadratinės formos, kurios koeficientas prie pirmojo nežinomojo kvadrato nelygus nuliui.*

Įrodymas. Tegu $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Nagrinėsime kelis atvejus.

<u>1 atvejis.</u> Kai $a_{11} \neq 0$, tai nieko įrodineti nereikia.

<u>2 atvejis.</u> Kai egzistuoja toks i $(i \neq 1)$, kad $a_{ii} \neq 0$, tai atlikus keitinį

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 = & & & & y_i & & \\
x_2 = & & y_2 & & & & \\
x_3 = & & & y_3 & & & \\
\cdots & & & & & & \\
x_i = & y_1 & & & & & \\
\cdots & & & & & & \\
x_n = & & & & & & y_n
\end{array}$$

gausime kvadratinę, kurios koeficientas $b_{11} \neq 0$.

<u>3 atvejis.</u> Kai $a_{ii} = 0$ su visais i, tai $\exists s, t$, kad $a_{st} \neq 0$. Pakeitę indeksaciją, galime pasiekti tai, kad $a_{12} \neq 0$. Atlikime kintamųjų keitinį:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Tada naujos kvadratinės formos matrica bus

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & O \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & O \\ O & E \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+a_{21}+a_{22}+a_{21} & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

ir todėl $a_{11}+a_{21}+a_{22}+a_{21}=2a_{12}\neq 0$.

Įrodyta.

Teoremos 6 įrodymas. Tegu $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Įrodysime indukcijos pagal n būbu. Galimi keli atvejai.

1 atvejis. Jeigu $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$, tai įrodinėti nieko nereikia.

2 atvejis. Jeigu $f(x_1,x_2,...,x_n)\neq 0$, tai pagal *lemą* kvadratinę formą f galima suvesti prie kvadratinės formos

$g(y_1,y_2,...,y_n)=b_{11}y_1^2+2b_{12}y_1y_2+\cdots+2b_{1n}y_1y_n+h(y_2,...,y_n)=$

$b_{11}\left(y_1+\frac{b_{12}}{b_{11}}y_2+\cdots+\frac{b_{1n}}{b_{11}}y_n\right)^2+\left(-\left(\frac{b_{12}}{b_{11}}y_2+\cdots+\frac{b_{1n}}{b_{11}}y_n\right)^2+h(y_2,...,y_n)\right)\check{=}$

Atliekę keitinį

$y_1=z_1-\frac{b_{12}}{b_{11}}z_2-\cdots-\frac{b_{1n}}{b_{11}}z_n$

$y_2=z_2$

$\cdots$

$y_n=z_n$

gauname kvadratinę formą

$\check{=}b_{11}z_1^2+h_1(z_2,...,z_n)\overset{*}{=}$

Pagal indukcijos prielaidą kvadratinei formai $h_1(z_2,...,z_n)$ egzistuoja toks keitinys $\begin{pmatrix} z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}=D\begin{pmatrix} t_2 \\ \cdots \\ t_n \end{pmatrix}$, kad $h_1(z_2,...,z_n)=c_2t_2^2+\cdots+c_nt_n^2$.

Tada atliekę keitinį $\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ t_n \end{pmatrix}$, gausime

$\overset{*}{=}b_{11}t_1^2+c_2t_2^2+\cdots+c_nt_n^2=c_1t_1^2+c_2t_2^2+\cdots+c_nt_n^2$, čia $c_1=b_{11}$.

Įrodyta.

Pavyzdys. Kvadratinės formos $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2x_3$ kanoninės formos radimas.

Uždavinys. Kvadratinės formos $f=X^TAX$ *rangu* vadinamas matricos A rangas. Įrodykite, kad kvadratinės formas rangas yra lygus nenulinių matricos A tikrinių reikšmių skaičiui.**Įrodyti paliekama studentams**□

Teorema 7 (inercijos dėsnis kvadratinėms formoms). *Tegu kvadratinę* *formą* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. *dviem būdais galima suvesti prie kanonio pavidalo*:

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 - \lambda_{r+1} y_{r+1}^2 - \cdots - \lambda_s y_s^2, \lambda_i > 0$$
$$\mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_p z_p^2 - \mu_{p+1} z_{p+1}^2 - \cdots - \mu_t z_t^2, \mu_j > 0.$$

Tada $s = t$ *ir* $r = p$.

Įrodymas. Tegu C ir D dviejų keitinių matricos: $X = CY$ ir $X = DZ$:
$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 - \lambda_{r+1} y_{r+1}^2 - \cdots - \lambda_s y_s^2, \lambda_i > 0$ ir
$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_p z_p^2 - \mu_{p+1} z_{p+1}^2 - \cdots - \mu_t z_t^2, \mu_j > 0.$
tegu $r < p$. Matricos C ir D yra neišsigimusios, todėl $Y = C^{-1}X$ ir $Z = D^{-1}X$.
Tegu $C^{-1} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline * \end{pmatrix} \}r$, o $D^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ \hline F_2 \end{pmatrix} \}n-p$.

Nagrinėkime tiesinių lygčių sistemą $\left.\begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} r+n-p.$

Sistema turi nenulinį sprendinį, nes $r+n-p = r-(n-p) < n$. Tegu $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ – šis nenulinis sprendinys:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1X^0 \\ \hline F_2X^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ \hline O \end{pmatrix}.$$

Stulpeliai $Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \cdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ ir $Z^0 = \begin{pmatrix} z_1^0 \\ \cdots \\ z_n^0 \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ yra nenuliniai, nes matricos C^{-1} ir D^{-1} yra neišsigimusios.

Beto $y_1^0 = \cdots = y_r^0 = z_{n-p}^0 = \cdots = z_n^0 = 0$, nes $Y^0 = C^{-1}X^0 = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline * \end{pmatrix} X^0 = \begin{pmatrix} F_1\, X^0 \\ \hline * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ \hline * \end{pmatrix} \}r$ ir $Z^0 = D^{-1}X^0 = \begin{pmatrix} * \\ \hline F_2 \end{pmatrix} X^0 = \begin{pmatrix} * \\ \hline F_2\, X^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \hline O \end{pmatrix} \}n-p$.

Tada
$f(x_1^0, .., x_n^0) = g(y_1^0, ..., y_n^0) = \lambda_1 0^2 + \cdots + \lambda_r 0^2 - \lambda_{r+1}(y_{r+1}^0)^2 - \cdots - \lambda_s (y_s^0)^2 < 0$
$f(x_1^0, .., x_n^0) = h(z_1^0, ..., z_1^0) = \mu_1 (z_1^0)^2 + \cdots + \mu_p \left(z_p^0\right)^2 - \mu_{p+1} 0^2 - \cdots - \mu_t 0^2 > 0.$

Prieštara įrodo teoremą.

Uždavinys. Įrodykite: jeigu C - neišsigimusi matrica, o X - nenulinis stulpelis, tai $CX \neq 0$.

Įrodyti paliekama studentams$\square$

Apibrėžimas. *Realioji kvadratinė forma* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *vadinama teigiamai apibrėžta, jeigu su visais* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$

$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \geq 0$ ir $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$

Teorema 8. *Realioji kvadratinė forma* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai jos kanoninė forma yra lygi*

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 \; .$$

Įrodymas.Tegu $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ – kintamųjų keitinys kvadratinę formą suvedantis prie kanoninio pavidalo $g(y_1, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$. Matrica $C-$ neišsigimusi, todėl $\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. Tegu $\lambda_i \leq 0$. Tada

$$f(x_1', x_2', ..., x_n') = g\left(0, ..., 0, \underset{i}{1}, 0, ..., 0\right) = \lambda_i \leq 0 \text{ , čia } \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Taigi, kvadratinė forma f yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kada $\lambda_i > 0$ su visais $i = 1, 2, ..., n$. Atlikę kintamųjų keitinį $y_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} z_i$ su visais i gausime reikiamą kvadratinės formos išraišką $f(x_1, x_2, ..., x_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$.

Įrodyta.

Apibrėžimas. *Tegu kvadratinės formos* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *matrica yra* A. *Tada determinantai*

$$a_1 = |a_{11}|, a_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., a_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vadinami kvadratinės formos f *pagrindiniais minorais.*

Teorema 9 (SYLVESTER J.J. požymis). *Kvadratinė forma yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai visi jos pagrindiniai minorai yra teigiami.*

Įrodymas.$\Longrightarrow$ Tegu kvadratinė forma $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ yra teigiamai apibrėžta , o matrica C yra kintamųjų keitinio matrica suvedanti formą prie kanoninio pavidalo:

$C^T AC = E$. Jeigu $D = C^{-1}$, tai $D^T ED = A$ ir $a_n = \det A = \det D^T D = (\det D)^2 > 0$.

Nagrinėkime kvadratinę formą $\bar{f}(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$.

Tai teigiamai apibrėžta kvadratinė forma kintamųjų $x_1, x_2, ..., x_k$ atžvilgiu, todėl $a_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$, $k = 1, 2, ..., n-1$.

$\Longleftarrow$ Indukcija pagal n .

Turime $a_1 > 0, a_2 > 0, ..., a_n > 0$. Tegu $A = \begin{array}{c} n-1\{ \\ \end{array} \begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$. Pagal indukcijos prielaidą kvadratinė forma su matrica $B-$ teigiamai apibrėžta, todėl egzistuoja neišsigimusi matrica $C : C^T BC = E_{n-1}$.

Tegu matrica $C_1 = \begin{pmatrix} C & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$.

Tada $A_1 = C_1^T AC = \begin{pmatrix} C^T BC & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \alpha_1 \\ & E_{n-1} & & \cdots \\ & & & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & \beta \end{pmatrix}$

ir $\det A_1 = \det A \cdot (\det C_1)^2 > 0$.

Tegu $D = \begin{pmatrix} & & & -\alpha_1 \\ & E_{n-1} & & \cdots \\ & & & -\alpha_{n-1} \\ -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$,

tada

$A_2 = D^T A_1 D =$

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & E_{n-1} & & \cdots \\ & & & 0 \\ -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \alpha_1 \\ & E_{n-1} & & \cdots \\ & & & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & -\alpha_1 \\ & E_{n-1} & & \cdots \\ & & & -\alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & E_{n-1} & & \cdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

ir $\det A_2 = \det A_1 \cdot (\det D)^2 > 0 \Longrightarrow \gamma > 0$.

Taigi, kvadratinės formos f kanoninės formos matricos įstrižainėje tiegiami skaičiai.

Įrodyta.