Algebros egzaminas. Informatika. 2 semestras. 2002 06 14. Rimantas Grigutis

1. *Tegu U - poerdvis* R^n *ir* $P = v_0 + U$ *- plokštuma. Įrodykite: (i) jeigu* $v_1, v_2 \in P$, *tai* $v_1 - v_2 \in U$; *(ii) jeigu* $v_1 \in P$ *ir* $v_1 - v_2 \in U$, *tai* $v_2 \in P$.

Sprendimas.

(i) Jeigu $v_1, v_2 \in P$, tai $v_1 = v_0 + u_1$ ir $v_2 = v_0 + u_2$, čia $u_1, u_2 \in U$(pagal apibrėžimą). Tada $v_1 - v_2 = u_1 - u_2 \in U$, nes $U-$ poerdvis.

(ii) Jeigu $v_1 \in P$ ir $v_1 - v_2 \in U$, tai $v_1 - v_2 = u$ ir $v_1 = v_2 + u$, čia $u \in U$.

Įrodyta.

2. *Su kuriomis s reikšmėmis, lygčių sistemos:* $x_1+x_2+sx_3 = 0$; $x_1+sx_2+x_3 = 0$; $sx_1 + x_2 + x_3 = 0$ *sprendiniais yra: (i) tiesė; (ii) plokštuma; (iii) taškas; (iv) visa erdvė* R^3 *?*

Sprendimas. Sistemos matricos determinatas $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & 1 \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3s - 2 - s^3 = -(s+2)(s-1)^2$. Todėl

(i) kai $s = -2$, tai sprendinių aibė yra tiesė $x_1 = t, x_2 = t, x_3 - t$;

(ii) kai $s = 1$, tai sprendinių aibė yra plokštuma $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

(iii) kai $s \neq -2$ arba $s \neq 1$, tai tai sprendinių aibė yra taškas $(0,0,0)$;

(iv) nera tokio s, kad taip būtų.

Išspręsta.

3. *Raskite vektoriaus* $v = (7, -3, -1)$ *ortogonaliąją projekciją ir statmenį į poerdvį, apibrėžtą lygčių sistema:* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $4x_1 + 5x_3 = 0$.

Sprendimas.

Poerdvio bazė yra vektorius $(-5, 1, 4)$. Ortogonalaus papildinio bazė yra $(1, 1, 1)$; $(4, 0, 5)$. Tada išsprendus lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 4y - 5z = 7 \\ x + z = -3 \\ x + 5y + 4z = -1 \end{cases}, \text{Solution is : } \{y = 1, z = -1, x = -2\}$$

turėsime, kad $v = (-2(1,1,1) + (4,0,5)) + (-(-5,1,4)) = (2,-2,3) + (5,-1,-4)$.

Atsakymas: $\mathrm{proj}_{\langle(-5,-9,4)\rangle}v=(2,-2,3)$; $\mathrm{ort}_{\langle(-5,-9,4)\rangle}v=(5,-1,-4)$.

4. *Raskite kvadratinės formos* $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$ *: (i) rangą; (ii) normalųjų pavidalą ir keitimo matricą.*

Sprendimas.

(i) Kvadratinės formos rangas 2.

(ii) $f=y_1^2-y_2^2$ ir keitimo matrica $C=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, t.y. $\begin{matrix}x_1=y_1-y_2-y_3\\x_2=y_1+y_2\\x_3=y_3\end{matrix}$:

$$C^TAC=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&0.5&0\\0.5&0&0.5\\0&0.5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1.0&0&0\\0&-1.0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

5. *Pasinaudoję Košy - Švraco nelygybe aritmetinėje erdvėje* R^n, *įrodykite, kad* $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$, *su visais teigiamais realiais skaičiais* $a_1,a_2,...,a_n$.

Sprendimas.

Tegu $v=\left(\sqrt{a_1}\sqrt{,a_2},...,\sqrt{a_n}\right)$ ir $u=\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}},\frac{1}{\sqrt{a_2}},...,\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$. Tada $(u\cdot v)^2=$
$\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\right)^2=n^2\leq\parallel v\parallel^2\cdot\parallel u\parallel^2=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$.

Įrodyta.

6. *Tegu* $(x^3-6x^2+12x-8)(x^2+2x+1)$ *- tiesinio operatoriaus A charakteristinis polinomas. Parašykite visus galimus operatoriaus A matricos Žordano pavidalus ir kiekvienu iš šių atvejų nurodykite A minimalųjį polinomą.*

Sprendimas. Galimi 6 variantai:

Matrica   Minimalusis polinomas

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (x-2)^3\,(x+1)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (x-2)^3\,(x+1)^1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (x-2)^2\,(x+1)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix} \quad (x-2)^2\,(x+1)^1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (x-2)^1\,(x+1)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (x-2)^1\,(x+1)^1$$