1. TIESINIAI ATVAIZDŽIAI

Apibendrinti veiksmai su matricomis.

Teorema. Tegu M, N, P, Q, R, S - šešios Abelio grupės, tarp kurių apibrėžtos operacijos: $M \times N \to Q, N \times P \to R, Q \times P \to S, M \times R \to S$, t.y. $\forall m \in M, n \in N, p \in P$ apibrėžta $mn \in Q, (mn)\, p \in S, m\,(np) \in S$ .Tegu visos sandaugos yra distributyvios abiejų argumentų atžvilgiu ir $\forall m, n, p$ teisinga $(mn)\, p = m\,(np)$. Jeigu A_1, A_2, B, C yra matricos virš atitinkamai M, M, N, P ,tai $(AB)\, C = A\,(BC)$ ir $(A_1 + A_2)\, B = A_1 B + A_2 B$.

Be įrodymo.

1.1. Bazių keitimo matrica, vektoriaus koordinatės.

Lema. Tegu $v_1, ..., v_n$ tiesiškai nepriklausoma vektorinės erdvės (V, k) sistema, o A ir B matricos virš k , turinčios m stulpelių ir n eilučių. Jeigu $(v_1, ..., v_n)\, A = (v_1, ..., v_n)\, B$, tai $A = B$.

Įrodymas. Tegu $C = A \Leftrightarrow B$ ir $(v_1, ..., v_n)\, C = 0$. Tada

$$(v_1, ..., v_n)\, C = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{n} v_s c_{s1}, ..., \sum_{s=1}^{n} v_s c_{sn} \right) = (0, ..., 0),$$

t.y. $\sum_{s=1}^{n} v_s c_{sj} = 0$ su visais $j = 1, ..., n$. Sistema $v_1, ..., v_n$ tiesiškai nepriklausoma , todėl $c_{sj} = 0$ su visais $1 \le s, j \le n$.

Įrodyta.

Tegu (V, k) - vektorinė erdvė ir $\dim V = n$, o $v_1, ..., v_n$ - V bazė. Jeigu $v \in V$, tai $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ vadinamas *koordinatiniu stulpeliu.*

Tegu $v'_1, ..., v'_n$ kita V bazė. Tada

$$v'_1 = c_{11} v_1 + \cdots + c_{n1} v_n$$
$$\cdots$$
$$v'_n = c_{1n} v_1 + \cdots + c_{nn} v_n$$

$(v_1', ..., v_n') = (v_1, ..., v_n) \cdot C$, čia $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ vadinama vienos bazės keitimo kita baze *keitimo matrica.*

Iš lemos turime, kad taip apibrėžta matrica C yra vienintėlė.

Kaip keičiasi vektoriaus v koordinatinis stulpelis keičiantis bazei ?

$$v = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (v_1', ..., v_n') \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \cdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = [(v_1, ..., v_n) \cdot C] \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \cdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = (v_1, ..., v_n) \cdot [C \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \cdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}].$$

Iš lemos turime, kad

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \cdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}.$$

Teiginys. Keitimo matrica pasižymi šiomis savybėmis:

1. Bazės keitimo ta pačia baze keitimo matrica yra vienetinė.

2. Jeigu pirmosios bazės keitimo antrąja baze keitimo matrica yra C , o antrosios bazės keitimo trečiąja baze yra D , tai pirmosios bazės keitimo trečiąja baze matrica yra CD.

3. Keitimo matrica yra neišsigimusi matrica.

Įrodymas.1. $(v_1, ..., v_n)\, C = (v_1, ..., v_n)\, I \Longrightarrow C = I$.

2. Tegu bazės $v_1, ..., v_n$ keitimo baze $v_1', ..., v_n'$ matrica yra C, o bazės $v_1', ..., v_n'$ keitimo baze $v_1'', ..., v_n''$ matrica yra D. Tada

$(v_1'', ..., v_n'') = (v_1', ..., v_1')\, D = ((v_1, ..., v_n)\, C)\, D = (v_1, ..., v_n)\, CD$.

3. Tada, kai $v_1'' = v_1, ..., v_n'' = v_n$ iš 2. ir 1. teiginių turime $CD = I \Longrightarrow C = D^{-1}$, taigi, matrica $C \Leftrightarrow$ neišsigimusi.

1.2. Tiesinio atvaizdžio apibrėžimas, branduolys ir vaizdas.

Apibrėžimas. Tegu U ir V - vektorinės erdvės virš kūno k .

Funkcija $\mathcal{A} : U \to V$ vadinama *tiesiniu atvaizdžiu,* jeigu

1. $\mathcal{A}(u_1 + u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$ su visais $u_1, u_2 \in U$.

2. $\mathcal{A}(\alpha u) = \alpha \mathcal{A}(u)$ su visais $\alpha \in k$ ir $u \in U$.

Pastaba dėl terminų. Tuo atveju, kai $U = V$, tiesinį atvaizdį vadina tiesiniu operatoriumi. Transformacijomis(tiesinėmis transformacijomis) vadina ir tiesinius atvaizdžius ir tiesinius operatorius tuo atveju kai iš konteksto aišku apie ką kalbama.

Pavyzdžiai. 1.Trimatės erdvės *judesiai : centrinė simetrija, ašinė simetrija, veidrodinė simetrija, lygiagretusis postūmis* ,- yra tiesiniai trimatės erdvės atvaizdžiai.

2. Tegu $R[0,1]$ yra realiųjų tolydžiųjų funkcijų vektorinė erdvė. Funkcija $\mathcal{A}(f) = f(0)$ yra tiesinis atvaizdis.

3. Tegu $R_n[x]$ polinomų, kurių laipsnis neviršija n , vektorinė erdvė. Diferencijavimo funkcija $\mathcal{D}(f) = f'$ yra tiesinis atvaizdis.

Teiginys. Tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A} : U \to V$ savybės:

1. $\mathcal{A}(0) = 0$.

2. Jeigu $u_1, ..., u_n$ yra tiesiškai priklausoma U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), ..., \mathcal{A}(u_n)$ yra tiesiškai priklausoma V sistema.

3. Jeigu $u_1, ..., u_n$ yra generuojanti U sistema, tai $\mathcal{A}(u_1), ..., \mathcal{A}(u_n)$ yra generuojanti $\mathcal{A}(U)$ sistema.

Įrodyti paliekama studentams$\square$

Apibrėžimai. Tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A} : U \to V$ *branduoliu* vadinama U aibė

$$\ker \mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = 0\}.$$

Tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A} : U \to V$ *vaizdu* vadinama V aibė

$$im\mathcal{A} = \{v \in V | \exists u \in U : \mathcal{A}u = v\}.$$

Jeigu $\ker \mathcal{A} = 0$, tai $\mathcal{A}$ vadinamas *injektyviuoju tiesiniu atvaizdžiu* (*monomorfizmu*).

Jeigu $im\mathcal{A} = V$, tai $\mathcal{A}$ vadinamas *siurektyviuoju tiesiniu atvaizdžiu* (*epimorfizmu*).

Jeigu $\ker \mathcal{A} = 0$ ir $im\mathcal{A} = V$, tai $\mathcal{A}$ vadinamas *bijektyviuoju tiesiniu atvaizdžiu* (*izomorfizmu*).

Examples.

1. Let $\mathcal{P}$ be the projection of $\mathbf{R}^2$ on a line L from $\mathbf{R}^2$.

Then the *kernel* of $\mathcal{P}$ is the set of all vectors in $\mathbf{R}^2$ which are perpendicular to L and the *image* of $\mathcal{P}$ is the set of all vectors parallel to L. Indeed, the vectors which are perpendicular to L and only these vectors are annihilated by the projection. This proves the statement about the kernel. The projection on L of every vector is parallel to L (by the definition of projection) and conversely, every vector which is parallel to L is the projection of some vector from $\mathbf{R}^2$, for example, it is the projection of itself. This proves the statement about the image.

2. Let $\mathcal{R}$ be the rotation of $\mathbf{R}^2$ through angle $\frac{\pi}{3}$; counterclockwise.

Then the *kernel* of $\mathcal{R}$ is 0 (no non-zero vectors are annihilated by the rotation). The *image* of the rotation is the whole $\mathbf{R}^2$. Indeed, for every vector w in $\mathbf{R}^2$ let v be the vector obtained by rotating w through angle $\frac{\pi}{3}$; clockwise. Then w is the result of rotating v through $\frac{\pi}{3}$ counterclockwise, thus w is in the range of our transformation. Since w was an arbitrary vector in $\mathbf{R}^2$, the range of the rotation is the whole $\mathbf{R}^2$.

3. Let $\mathcal{RF}$ be the reflection of $\mathbf{R}^2$ about a line L.

Then the *kernel* of $\mathcal{RF}$ is 0. Indeed, no non-zero vectors are annihilated by the reflection. The *image* is the whole $\mathbf{R}^2$ (prove it!).

4. Let $\mathcal{Z}$ be the zero transformation from V to W which takes every vector in V to the zero of W.

Then the *kernel* of $\mathcal{Z}$ is V and the *image* is 0 (prove it!).

5. Let $\mathcal{D}$ be the linear operator of the vector space of $P[x]$ polynomials which takes every polynomial to its derivative.

Then the *image* of $\mathcal{D}$ is the whole $P[x]$ (every polynomial is a derivative of another polynomial) and the *kernel* of $\mathcal{D}$ is the set of all constants (prove it!).

6. Let $\mathcal{I}$ be the linear operator on the space $P[x]$ of polynomials which takes every polynomial $g(x)$ to the polynomial $\int_0^x g(t)dt$. Then the *image* of $\mathcal{I}$ is the set of all polynomials $h(x)$ such that $h(0) = 0$ (every such polynomial is the image under $\mathcal{I}$ of its derivative) and the kernel of $\mathcal{I}$ is 0 (the only function with 0 anti-derivative is 0).

7. Let $\mathcal{T}$ be the linear transformation from the space of all n by n matrices $M_{n\times n}(\mathbf{R})$ to $\mathbf{R}$ which takes every matrix to its *trace.*

Then the *image* of $\mathcal{T}$ is the whole $\mathbf{R}$(every number is the trace of some matrix) and the *kernel* consists of all n by n matrices with zero trace.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be a linear transformation from U to V..Then* $\ker\mathcal{A}$ *is a subspace of U and im$\mathcal{A}$ is a subspace of V.*

Proof. We need to prove that $\ker\mathcal{A}$ is closed under addition and scalar multiplication. Let u_1 and u_2 be elements from $\ker\mathcal{A}$. Then $\mathcal{A}(u_1) = 0$ and $\mathcal{A}(u_2) = 0$ (the definition of a kernel). Hence $\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2) = 0 + 0 = 0$. But $\mathcal{A}$ is a linear transformation, so$\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2) = \mathcal{A}(u_1 + u_2)$. Hence $\mathcal{A}(u_1 + u_2) = 0$. By the definition of a kernel this implies that $u_1 + u_2$ is in $\ker\mathcal{A}$. Thus $\ker\mathcal{A}$ is closed under taking sums.

Now let u be an element of $\ker \mathcal{A}$ and let a be a number. Since u is in $\ker \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(u) = 0$. Then $a\mathcal{A}(u) = au = 0$ (prove the last equality!). On the other hand, since A is a linear transformation, $a\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(au)$. So $\mathcal{A}(au) = 0$, whence au is in $\ker \mathcal{A}$. This shows that $\ker \mathcal{A}$ is closed under scalar multiplication.

The proof that $im\mathcal{A}$ is a subspace is left as an exercise.

Theorem. *Every subspace of a vector space is a kernel of some linear transformation and the image of some other linear transformation.*

Įrodymas. Tegu U yra vektorinės erdvės V poerdvis ir vektorių sistema $u_1, ..., u_k$ - poerdvio U bazė. Papildykime šią sistemą iki vektorinės erdvės V bazės: $u_1, ..., u_k, v_{k+1}, ..., v_n$. Turime ,kad $U = [u_1, ..., u_k]$ ir tiesinis apvalkalas $[v_{k+1}, ..., v_n]$ poerdvio U tiesioginis papildinys: $V = U \oplus [v_{k+1}, ..., v_n]$.

Tiesinius atvaizdius $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$ apibrėžkime formulėmis

$\mathcal{A}(a_1u_1 + \cdots + a_ku_k + a_{k+1}v_{k+1} + \cdots a_nv_n) = a_1u_1 + \cdots + a_ku_k,$

$\mathcal{B}(a_1u_1 + \cdots + a_ku_k + a_{k+1}v_{k+1} + \cdots a_nv_n) = a_{k+1}v_{k+1} + \cdots a_nv_n.$

Tada $\ker \mathcal{A} = [v_{k+1}, ..., v_n]$, $im\mathcal{A} = U$ ir $\ker \mathcal{B} = U$, $im\mathcal{B} = [v_{k+1}, ..., v_n]$.

Įrodyta.

Example. Let E be the subspace of $\mathbf{R}^3$ consisting of vectors which are parallel to a plane P. Then E is *the kernel* of the projection of $\mathbf{R}^3$ on the line perpendicular to the plane and E is *the image* of the projection on the plane P.

The theorem about kernel and images implies the following important property of homogeneous systems of linear equations.

Theorem. Let $Av = 0$ be a homogeneous systems of linear equations with n unknowns and m equations. Then the set of solutions of this system coincides with the kernel of the linear transformation $\mathcal{A}$ from $\mathbf{R}^n$ to $\mathbf{R}^m$ with standard matrix A and so it is a subspace of $\mathbf{R}^n$.

Indeed the set of solutions of the system $Av = 0$ is precisely the set of vectors annihilated by the linear transformation $\mathcal{A}$.

1.3. Izomorfizmų teoremos.

Teorema apie izomorfizmą. *Tegu $\mathcal{A} : U \to V \Leftrightarrow$ tiesinis atvaizdis. Poerdvis $im\mathcal{A}$ izomorfinis faktorerdvei $U/\ker \mathcal{A}$.*

Įrodymas. Apibrėžkime funkciją $i : U/\ker \mathcal{A} \to im\mathcal{A}$ formule $i(\bar{u}) = \mathcal{A}(u)$. Parodysime, kad tai ir yra ieškomas izomorfizmas.

Funkcija i yra tiesinis atvaizdis:

$i(a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2) = i(\overline{a_1u_1 + a_2u_2}) = \mathcal{A}(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1\mathcal{A}(u_1) + a_2\mathcal{A}(u_2) = a_1i(\bar{u}_1) + a_2i(\bar{u}_2)$.

Tiesinis atvaizdis i yra monomorfizmas:
$i(\bar{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \ker \mathcal{A} \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$.
Tiesinis atvaizdis i yra epimorfizmas:
su kiekvienu $v \in im\mathcal{A}$ egzistuoja $u \in U$, kad $\mathcal{A}(u) = v$, t.y. $i(\bar{u}) = \mathcal{A}(u) = v$.
Įrodyta.
Teorema apie izomorfizmą dažnai reiškiama tokia komutatyvia diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "p"'] & & V \\ & U/\ker\mathcal{A} \arrow[ur, "i"] & \end{tikzcd},$$

čia $p(u) = \bar{u}$, $i(\bar{u}) = \mathcal{A}(u)$, taigi, $\mathcal{A}(u) = i(p(u))$.

Pastaba. Paskutiniųjų teoremų dėka matome, kaip galėtume mąstyti faktorerdvę. Kiekvienam vektorinės erdvės poerdviui galime apibrėžti tiesinį atvaizdį, kurio vaizdas yra šis poerdvis, o branduolys - poerdvio tiesioginys papildinys. Pagal teoremą apie izomorfizmą faktorerdvę galime mąstyti kaip poerdvio tiesioginį papildinį.

Teorema. *Vektorinė erdvė U, k ,$\dim U = n$, yra izomorfinė aritmetinei erdvei k_n .*

Įrodymas. Tegu vektorių sistema $v_1, ..., v_n \Leftrightarrow$ vektorinės erdvės U bazė.
Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $\mathcal{A} : k_n \to U$ formule
$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = (v_1, ..., v_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
$im\mathcal{A} = U$, nes sistema $v_1, ..., v_n \Leftrightarrow$ generuojanti erdvę U sistema.
$\ker \mathcal{A} = 0$, nes sistema $v_1, ..., v_n \Leftrightarrow$ tiesiškai nepriklausoma sistema.
Gavome, kad U yra izomorfinė aritmetinei erdvei k_n.
Įrodyta.
Pastaba. $U \approx k_n$, bet šis izomorfizmas nėra kanoninis,- jis priklauso nuo bazių.
Paskutinioji teorema rodo, kad baigtinės dimensijos vektorinę erdvę galima reikšti aritmetinės erdvės elementais, t.y. stulpeliais: $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \to \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

1.4. Tiesinio atvaizdžio matricos.

Dabar parodysime kaip reikšti tiesinį atvaizdį $\mathcal{A} : U \to V$. Tuo pačiu realizuosime šią diagramą:

$$\begin{array}{ccc} U & \overset{\mathcal{A}}{\to} & V \\ i_U \downarrow & & \downarrow i_V \\ k_n & \underset{A}{\to} & k_m \end{array}$$

Tegu $\mathcal{A} : U \to V$ - tiesinis atvaizdis, o $u_1, ..., u_n$ U bazė, $v_1, ..., v_m$ V bazė. Tada

$$Au_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{m1}v_m$$
$$\vdots$$
$$Au_n = a_{1m}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m$$

Matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ vadinama tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A}$ matrica duotų matricų atžvilgiu. Turime

$$\mathcal{A}\left(u_1, ..., u_n\right) = \left(v_1, ..., v_m\right) A.$$

Matrica A apibrėžta vienareikšmiškai.

Koks ryšys tarp vektoriaus ir jo tiesinio vaizdo koordinačių?

Tegu $\mathcal{A}u = v$, čia $u = (u_1, ..., u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $v = (v_1, ..., v_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Turime

$$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}\left((u_1, ..., u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = \left(\mathcal{A}\left(u_1, ..., u_n\right)\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\left(v_1, ..., v_m\right) A\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \left(v_1, ..., v_m\right) \left(A \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}\right).$$

Tada $\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Kaip keičiasi tiesinio atvaizdžio matrica keičiantis vektorinių erdvių matricoms?

Tegu C ir D bazių keitimo matricos:

$(u'_1, ..., u'_n) = (u_1, ..., u_n) \cdot C$,

$(v'_1, ..., v'_m) = (v_1, ..., v_m) \cdot D$.

Tada, jeigu $\mathcal{A}\left(u_1, ..., u_n\right) = \left(v_1, ..., v_m\right) A$ ir $\mathcal{A}\left(u'_1, ..., u'_n\right) = \left(v'_1, ..., v'_m\right) A'$, tai

$$A' = D^{-1}AC.$$

Pastaba. $rankA' = rankA$.

Įrodymas.$\diamond$

Kaip parinkti bazes vektorinėse erdvėse U ir V , kad tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A}$ matrica A būtų parasčiausia?

Teorema. *Tegu $\mathcal{A} : U \to V$ - tiesinis atvaizdis. Tada egzistuoja bazės vektorinėse erdvėse U ir V , kad tiesinio atvaizdžio $\mathcal{A}$ matrica A yra*

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times n-r} \\ 0_{m-r\times r} & 0_{m-r\times n-r} \end{pmatrix}.$$

Įrodymas.[................]

1.5. Veiksmai su tiesiniais atvaizdžiais.

Apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \to V$ - tiesiniai atvaizdžiai. Jų suma vadiname funkciją :*

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(u) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u).$$

Teiginys. *Tiesinių atvaizdžių suma - tiesinis atvaizdis.*

Įrodymas.$\diamond$

Apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{A} : U \to V$ - tiesinis atvaizdis, o $\alpha \in k$. Tada $\alpha\mathcal{A} : U \to V$ apibrėžiama*

$$(\alpha\mathcal{A})(u) = \alpha(\mathcal{A}(u)).$$

Teiginys. *Jeigu $\mathcal{A}$ - tiesinis atvaizdis, tai $\alpha\mathcal{A}$ - tiesinis atvaizdis.*

Įrodymas.$\diamond$

Apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{A} : V \to W$, $\mathcal{B} : U \to V$ - tiesiniai atvaizdžiai. Šių tiesinių atvaizdžių sandauga $\mathcal{AB} : U \to V$ vadinsime funkciją:*

$$(\mathcal{AB})(u) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(u)).$$

Teiginys. $\mathcal{AB}$ *- tiesinis atvaizdis.*

Uždavinys. *Tegu* U, V, W *- trys vektorinės erdvės virš to pačio kūno k, o* $\{u_i\}$ *- bazė erdvėje* U*,* $\{v_j\}$ *- bazė erdvėje*V*,* $\{w_k\}$ *- bazė erdvėje* W*. Tegu* $\mathcal{B}, \mathcal{C} : U \to V$ *, o* $\mathcal{A} : V \to W$ *tiesiniai atvaizdžiai ir* $\alpha \in k$ *. Tegu* B, C *yra tiesinių atvaizdžių* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *matricos bazėse* $\{u_i\}$ *ir* $\{v_j\}$*,* A *- tiesinio atvaizdžio* $\mathcal{A}$ *matrica bazėse* $\{v_j\}$ *ir* $\{w_k\}$*.*

Įrodykite, kad

$B + C$yra $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ matrica bazėse $\{u_i\}, \{v_j\}$;

αB yra $\alpha\mathcal{B}$ matrica bazėse $\{u_i\}, \{v_j\}$;

AB yra $\mathcal{AB}$ matrica bazėse $\{u_i\}, \{w_k\}$.