

Algebras pratybos informatikams. Rimantas Grigutis

4 pratybos. *Dalumas polinomams. Hornerio schema. Polinomų faktorizacija.*

1. Duotas polinomas $f(x) \in K[x]$ ir $c \in K$. Raskite polinomą $q(x) \in K[x]$ ir elementą $r \in K$ su kuriais teisinga lygybė

$$f(x) = (x - c)q(x) + r.$$

1) $f(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 3$, $K = \mathbf{Q}$, $c = -2; \frac{3}{2}$.

2) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^2 + 6x - 7$, $K = \mathbf{Q}$, $c = 2; -\frac{3}{2}$.

3) $f(x) = 2x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2$, $K = \mathbf{Z}_3$, $c = 1; 2$.

4) $f(x) = 3x^7 + 5x^6 + 4x^4 + 3x^2 + 4x + 5$, $K = \mathbf{Z}_7$, $c = 2; 4$.

2. Raskite a, b, c , kad dalydami polinomą $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ iš $x^2 + x + 1$, gautume liekaną $x + 1$, o dalydami $f(x)$ iš $x - 1$, gautume liekaną:

(a) 6; (b) 9; (c) 15; (d) 18.

3. Pasirinkite a ir b taip, kad polinomas $f(x) = x^5 + ax^4 - 8x^3 + 8x^2 + bx + 16$ dalytųsi iš $(x + 1)^2$.

4. Raskite a, b, c , jei polinomui $f(x)$, -1 yra antro kartotinumų šaknis, o 1 – paprastoji jo šaknis:

1) $f(x) = ax^2 + bx^3 + x^2 + cx - 3$.

2) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 5x + c$.

3) $f(x) = x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c$.

5. Raskite a, b, c , jeigu polinomas $f(x)$ dalijasi iš $(x + 1)^5(x - 5)$:

1) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 18x - 5$.

2) $f(x) = ax^4 - 2x^3 + bx^2 + cx - 5$.

3) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 5$.

6. Dalydami $f(x)$ dalijant iš $x - 1$, gaunama liekana 2, o dalijant iš $x - 2$, gaunama liekana 1. Kokia liekana gaunama dalijant polinomą $f(x)$ iš $(x - 1)(x - 2)$?

7. Dalydami $f(x)$ dalijant iš $x - 2$, gaunama liekana 1, o dalijant iš $x + 2$, gaunama liekana -1 , o dalijant iš $x - 3$ - liekana 3. Kokia liekana gaunama dalijant polinomą $f(x)$ iš $(x^2 - 4)(x - 3)$?

8. HORNERio schemos pagalba raskite racionališias polinomo šaknis.

1) $f(x) = 5x^5 - 7x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 7x + 6$.

2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 33x + 10$.

3) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 2x - 12$.

9. Išskaidykite polinomą dvinaro $x - x_0$ laipsniais.

1) $2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$, $x_0 = 1$.

2) $x^6 + 9x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 7x + 93$, $x_0 = -2$.

3) $2x^7 + x^5 - 3x^3 + 4x - 7$, $x_0 = 2$.

4) $3x^6 + 6x^5 + x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 30x - 7$, $x_0 = -2$.

5) $6x^5 - 4x^4 + 3x^2 + 5x + 7$, $x_0 = \frac{2}{3}$.

6) $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x - 10$, $x_0 = -\frac{3}{2}$.

10. Euklido algoritmo pagalba raskite didžiausią bendrą daliklį $d(x)$. Parašykite $d(x)$ tiesinę išraišką.

1) $d(x) = \text{DBD}(x^8 - 1, x^6 - 1) \in \mathbf{Q}[x]$.

2) $d(x) = \text{DBD}(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, x^3 - 1) \in \mathbf{Q}[x]$.

3) $d(x) = \text{DBD}(2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1, 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2) \in \mathbf{Q}[x]$.

4) $d(x) = \text{DBD}(x^7 + 2x^5 + 2x^2 - x + 2, x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3) \in \mathbf{Q}[x]$.

5) $d(x) = \text{DBD}(x^7 + 1, x^5 + x^3 + x + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$.

6) $d(x) = \text{DBD}(x^5 + x + 1, x^6 + x^5 + x^4 + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$.

7) $d(x) = \text{DBD}(x^5 + x + 1, x^6 + x^5 + x^4 + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$.

8) $d(x) = \text{DBD}(x^8 + 2x^5 + x^3 + x^2 + 1, 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 2) \in \mathbf{Z}_3[x]$.

Polinomų faktorizacija.

Teorema (Redukcinis neredukuojamo polinomo požymis). Tegu p - pirminis skaičius. Tegu

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in Z[x] , a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

ir polinomo f redukcija $\bar{f} \pmod{p}$ yra neredukuojamas polinomas virš \mathbf{Z}_p . Tada polinomas f neredukuojamas virš \mathbf{Q} .

Teorema (EISENSTEIN'o neredukuojamo polinomo požymis). Tegu p - pirminis skaičius, o

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$, $a_i \equiv 0 \pmod{p}$, kai $i = 0, \dots, n-1$, $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$. Tada f yra neredukuojamas virš \mathbf{Q} .

1. Ar polinamai yra neredukuojami virš \mathbf{Q} :

$$\begin{aligned} &3x^5 + 18x^2 + 24x + 6; \\ &7x^3 + 12x^2 + 3x + 45; \\ &2x^{10} + 25x^3 + 10x^2 - 30. \end{aligned}$$

2. Raskite polinomų kanoninius skaidinius virš nurodytų kūnų;

1) $x^5 - 10x^4 + 24x^3 + 9x^2 - 33x - 12$ virš \mathbf{Q} ;

2) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 15x - 2$ virš \mathbf{Q} ;

3) $x^6 + 2x^5 - 12x^4 - 24x^3 + 36x^2 + 60x - 24$;

4) $x^6 + x^5 - 12x^4 - 12x^3 + 36x^2 + 24x - 12$;

5) $x^4 + x$ virš \mathbf{Z}_5 ;

6) $x^3 + 2x^2 + 3$ virš \mathbf{Z}_5 ;

7) $2x^3 + x^2 + 2x + 2$ virš \mathbf{Z}_5 .

3. Parašykite visus neredukuojamus 2-ojo ir 3-ojo laipsnio polinomus virš baigtinių kūnų \mathbf{Z}_p , $p = 2, 3, 5$.