

Algebros pratybos. Rimantas Grigutis

2 pratybos. *Lyginiai*.

1. Nustatykite, kurie iš lyginių teisingi $\forall n \in \mathbf{N}$:

- 1) $n^3 \equiv n \pmod{3}$.
- 2) $n^3 + 3n \equiv 2 \pmod{5}$.
- 3) $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
- 4) $2m^3 - 3m^2 = 1 \pmod{10}$.

2. Įrodykite:

- 1) $a - 5b \equiv 0 \pmod{19} \implies 10a + 7b \equiv 0 \pmod{19}$.
- 2) $3^n \equiv -1 \pmod{10} \implies 3^{n+4} \equiv -1 \pmod{10}$.
- 3) $(m + n)^p \equiv m^p + n^p \pmod{p}$, su pirminiu p ir su visais sveikaisiais m ir n .

3. Raskite skaičiaus $N = (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1) \cdots (1000^2 + 1)$ dalybos iš 3 liekaną.

4. Laipsnio $a^n \pmod{m}$ skaičiavimas, užrašant laipsnio rodiklį $n = \sum_i \alpha_i 2^i$.

Apskaičiuokite

- 1) $7^{39} \pmod{41}$.
- 2) $22^{144} \pmod{73}$.
- 3) $233^{451} \pmod{23}$.
- 4) $214^{243} \pmod{21}$.

5. Išspręskite lyginius.

- 1) $12x \equiv 5 \pmod{5}$.
- 2) $11x \equiv 10 \pmod{16}$.
- 3) $13x \equiv 65 \pmod{78}$.
- 4) $8x \equiv 12 \pmod{20}$.
- 5) $91x \equiv 21 \pmod{56}$.
- 6) $18x \equiv 16 \pmod{22}$.
- 7) $33x \equiv 9 \pmod{39}$.
- 8) $52x \equiv 28 \pmod{60}$.
- 9) $74x \equiv 32 \pmod{94}$.
- 10) $34 \equiv 24 \pmod{38}$.
- 11) $60x \equiv 33 \pmod{84}$.
- 12) $69x \equiv 33 \pmod{84}$.

$$13) 54x \equiv 26 \pmod{62}.$$

6. *Dalumo požymiai.* Tegu

$$n = (a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_k 10^k + \dots + a_0.$$

$$Q_s(n) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{is+s-1} \dots a_{is+1} a_{is}),$$

$$\text{tada } n = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{is+s-1} \dots a_{is+1} a_{is}) \cdot 10^{is}$$

$$Q'_s(n) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (a_{is+s-1} \dots a_{is+1} a_{is}).$$

1) Įrodyti:

Su visais $n \in \mathbf{N}, s \in \mathbf{N}$ teisinga

$$n \equiv Q_s(n) \pmod{10^s - 1},$$

$$n \equiv Q'_s(n) \pmod{10^s + 1}.$$

2) Raskite dalumo požymius iš

i) 9,99,999; 11,101,1001.

ii) 7,13,37.

iii) 17,19.

Grupės.

7. 1) Parašykite sudėties ir daugybos lenteles žieduose $\mathbf{Z}_7, \mathbf{Z}_8, \mathbf{Z}_9, \mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{12}, \mathbf{Z}_{13}$.

2) Išspręskite lygtis $x^2 = 1$ ir $x^2 = -1$ minėtuose žieduose.

8. Su kuriais $a \in \mathbf{Z}_{100}$ teisinga: $a^{40} = \bar{1}$.